INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXI. BAND ZWEITES HEFT 1953

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

INGENIEUR-ARCHIV

XXI. BAND ZWEITES HEFT 1953

Bestimmung der Linien gleicher Hauptspannungssumme mittels Interferenzen gleicher Dicke*.

Von **A. Dose** und **R. Landwehr.**

1. Einleitung. In der Spannungsoptik werden die Spannungsverhältnisse in Bauteilen, soweit es sich um elastische Probleme handelt, an einem durchsichtigen Modell in polarisiertem Licht untersucht. Ebene Probleme werden dabei bevorzugt. Die üblichen Verfahren liefern im allgemeinen nur die Differenz der Hauptspannungen, die der Schubspannung proportional ist. Man erhält ein Bild der Linien gleicher Schubspannung, der Isochromaten. Mit besonderem Aufwand kann man auch die beiden Hauptspannungen von Punkt zu Punkt einzeln bestimmen. Eine solche häufiger durchgeführte Messung beruht z. B. auf der Anwendung des Interferometers nach Zehnder-Mach (*Favre* [1]). Doch ist es einfacher, noch eine zweite Größe zur Bestimmung heranzuziehen. Dazu geht man im allgemeinen von der Summe der Hauptspannungen aus. Die Kombination mit ihrer Differenz liefert dann die Werte der einzelnen Hauptspannungen. Zur Feststellung der Spannungssumme sind verschiedene Verfahren bekannt geworden, und zwar rein experimentelle, halbempirische und rein theoretische [2]. Fast alle Verfahren verlangen aber einen relativ großen Aufwand an Zeit und Mitteln. Am einfachsten ist noch die Bestimmung der Hauptspannungssumme aus der Messung der Dickenänderung δd der Modelle der Dicke d (aus Material mit den elastischen Konstanten E, μ) nach der Gleichung

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\mu}\frac{\delta d}{d}\,. \tag{1}$$

Diesen Zusammenhang benutzt schon *Mesnager* [3], der überhaupt die Bestimmung der Hauptspannungssumme in die Spannungsoptik eingeführt hat. Die Dickenänderung wird entweder mechanisch [mit mechanischer Übersetzung (*Huggenberger*), mit optischer Übertragung (*Coker*), mit interferenzoptischer Anzeige (*Mesnager* usw.) oder elektrischer Anzeige] oder rein optisch, und zwar mittels Interferenzen, gemessen. Da die auftretenden Dickenänderungen im elastischen Bereich maximal etwa von der Größenordnung 1/100 mm sind, ergibt sich eine erforderliche Meßgenauigkeit von einigen $1/10\,\mu$. Das ist aber gerade die Größenordnung der Lichtwellenlänge. Deshalb sind die Interferenzmethoden für diesen Zweck besonders geeignet.

2. Die bisher bekannt gewordenen Interferenzverfahren. In der Tabelle 1 sind die verschiedenen für die Bestimmung der Hauptspannungen, insbesondere der Spannungssumme, benutzten Interferenzverfahren zusammengestellt.

Unter „Beziehung" ist die Gleichung angeführt, nach der die Bestimmung von σ_1, σ_2 bzw. $\sigma_1 + \sigma_2$ erfolgt oder zu erfolgen hätte. Schon *Mesnager* [3] hat Interferenzen zur direkten punktweisen Bestimmung der Dickenänderung benutzt, indem er die zwischen zwei Glasplatten, die an den Armen eines Fühlhebels angebracht sind, vorbeiwandernden *Fizeau*schen Streifen auszählt. Handliche Interferenzfühlhebel beschreiben später *Vose* [4] und *Schaid* [5]. *Schaid* hat durch Be-

---

* Vorläufige Mitteilung: *R. Landwehr* und *A. Dose*, Naturwiss. **36** (1949), S. 342.

[1] *M. H. Favre*, Schweiz. Bauztg. **90** (1927), S. 291, 307; Rev. d'Opt. **8** (1929), S. 193, 241, 289; auch Diss. Zürich 1929.

[2] *E. G. Coker* u. *L. N. G. Filon*, A Treatise on Photoelasticity. S. 170 ff., Cambridge 1931; *L. Föppl* u. *H. Neuber*, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik, S. 31—67. München 1935; *G. Mesmer*, Spannungsoptik, S. 23, 73—85, 149—158. Berlin 1939; *M. M. Frocht*, Photoelasticity, Bd. II, S. 202 ff. New York 1948; *L. Föppl* u. *E. Mönch*, Praktische Spannungsoptik. S. 39 ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950; *M. Hetényi*, Handbook of Experimental Stress Analysis, S. 874 ff., 906 ff. New York u. London 1950; *A. Kuske*, Verfahren der Spannungsoptik, S. 25 ff. Düsseldorf 1951; *L. Villena*, Fotoelasticidad, Madrid 1943; *A. Pirard*, La Photoelasticité, Paris und Lüttich 1947; *H. T. Jessop* u. *F. B. Harris*, Photoelasticity, Principles and Methods, London 1949.

[3] *A. Mesnager*, Congrès international des méthodes d'essai des matériaux de construction, Paris **1** (1900), S. 149; Buda-Pesth-Congress of the International Association for Testing Materials 1901, Ann. des Ponts et Chaussées 8. Sér., **1**, 4. Trim. (1901), S. 128.

[4] *R. W. Vose*, J. Appl. Mech. **2** (1935), A 99.

[5] *R. J. Schaid*, Master of Science Thesis, Northwestern Univ. 1947.

Tabelle 1. *Lichtoptische Interferenzverfahren in der Spannungsoptik.*

Autor	Zeit	gemessene Größen	Beziehung	Beobachtung	Gerät	Besondere Anordnung	Art der Beobachtung
Mesnager	1901	$\sigma_1+\sigma_2$	$\delta d=-\frac{\mu d}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$	punktweise	Interferenz-Fühlhebel	„Interferenzen gleicher Dicke" zwischen Platten an Fühlhebelarmen	in Reflexion
Vose	1935	„	„	„	„	„ „	„
Schaid	1947	„	„	„	„	wie oben, mit verspiegelten Platten	in Transmission
Favre	1927	σ_1, σ_2	$m_1\lambda=d(C_1\sigma_1+C_2\sigma_2)$ $m_2\lambda=d(C_1\sigma_2+C_2\sigma_1)$	punktweise	Interferometer nach *Zehnder-Mach*	1 Modell, Polarisator, $2\lambda/2$-Platten, Kompensations-Platte	in Transmission visuell
Tank	1936	$\sigma_1+\sigma_2$	$m\lambda=d(C_1+C_2)(\sigma_1+\sigma_2)$	„	„	1 Modell, Polarisator, $2\lambda/2$-, $1\lambda/4$-Platte	„
Sinclair	1939	„	$m\lambda=d\left(C_1+C_2-\frac{2n\mu}{E}\right)\cdot(\sigma_1+\sigma_2)$	ganzes Feld	„	2 Modelle, 2 Quarz-Platten	in Transmission visuell photographisch
Bubb	1940	„	„	„	Interferometer nach *Michelson*	1 Modell, Polarisator und Analysator, Drehung um $2\times45°$ durch Magnetorotation	in Transmission photographisch
Bubb	1940	„	$m\lambda=d(C_1+C_2)(\sigma_1+\sigma_2)$	„	„	wie oben mit Immersion	„
Sinclair	1940	„	$\left[m\lambda=-\frac{n\mu d}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$	„	Interferometer nach *Zehnder-Mach*	2 Modelle aus Lucite, Kompensator zur Justierung	„
Maris	1927	$\sigma_1+\sigma_2$	$\left[m\lambda=-\frac{\mu d}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$	punktweise, ganzes Feld	Interf.-Anordnung mit 1 Strahlengang	„Interferenzen gleicher Dicke" zwischen Modell und Vergleichsfläche	in Reflexion visuell
Tesar	1932	„	„	punktweise, ganzes Feld	„	„ „	in Reflexion visuell (photographisch)
Frocht	1933	„	$m\lambda=-\frac{\mu d}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$	ganzes Feld	„	„ „	in Reflexion photographisch
Fabry	1930	σ_1, σ_2	$\left[m_1\frac{\lambda}{2}=d(C_1\sigma_1+C_2\sigma_2)\right.$ $\left.m_2\frac{\lambda}{2}=d(C_1\sigma_2+C_2\sigma_1)\right]$	punktweise, ganzes Feld	„	„Interferenzen gleicher Dicke" im Modell, *Haidinger*sche Ringe, Analysator	in Transmission visuell (photographisch)
Landwehr Dose	1949	$\sigma_1+\sigma_2$	$m\frac{\lambda}{2}=-\frac{n\mu d}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$	punktweise, ganzes Feld	„	„Interferenzen gleicher Dicke" im Modell, *Haidinger*sche Ringe	in Reflex. (Transmission) vis., phot.

σ_1, σ_2 Hauptspannungen — μ *Poisson*sche Zahl — d Dicke des Modells — C_1, C_2 spannungsoptische Konstanten ($C_1 - C_2 = \lambda/S_c$) — m Ordnung der Interferenzstreifen
E Elastizitätsmodul — n Brechungsindex des Modellmaterials — δd Dickenänderung des Modells — λ Wellenlänge des benutzten Lichtes — [ ] nicht ausdrücklich angegeben

nutzung von Mehrfachreflexionen [1] die Schärfe der Interferenzstreifen und damit die Genauigkeit der Ablesung gesteigert.

Tank [2] hat das Verfahren von *Favre* [3] durch Hinzufügung eines $\lambda/4$-Plättchens derart modifiziert, daß er — allerdings auch nur punktweise — unmittelbar die Spannungssumme bestimmen konnte [4]. *Sinclair* [5] und *Bubb* [6] haben das ganze Feld der Linien gleicher Hauptspannungssumme, also der Isopachen direkt aufnehmen können; *Sinclair* wieder mit dem Zehnder-Mach-Interferometer und *Bubb* mit einem Michelson-Interferometer. Durch Benutzung eines besonderen Methyl-Methacryl-Harzes, des Lucites, mit extrem geringer Doppelbrechung konnte *Sinclair* dieses Verfahren weiter vereinfachen [7]. *Maris* [8] hat zuerst mit Hilfe einer einfachen Interferenz-Anordnung — und zwar auch schon über das ganze Gesichtsfeld hinweg — die Spannungssumme bestimmt, indem er die Interferenzen gleicher Dicke zwischen dem Modell und einer Vergleichsfläche zur Messung benutzt. Unabhängig von ihm hat später *Tesar* [9] einen gleichen Vorschlag gemacht. *Frocht* [10] hat das Verfahren weiter durchgeführt und auf verschiedene praktische Probleme angewandt. Auf die experimentellen Schwierigkeiten weist schon *Maris* hin. *Frocht* muß besondere Maßnahmen treffen, um das Modell auch bei Belastung zur Vergleichsebene parallel zu erhalten. Das ganze Bild der Isopachen wird direkt nur bei einer ganz ebenen Oberfläche des Modells sichtbar. Doch könnte man auch hier bei geringen Abweichungen das weiter unten beschriebene Differenzverfahren anwenden.

Fabry [11] hat ein Verfahren unter Benutzung der in dem Modell selbst entstehenden Interferenzen gleicher Dicke angegeben, um beide Spannungen getrennt zu bestimmen. Dieses mußte dazu allerdings so parallel sein, daß ein deutliches Interferenz-Streifensystem entsteht. Da er ferner ein Material mit einer im Verhältnis zur elastischen Verformbarkeit hohen spannungsoptischen Empfindlichkeit benutzt, nämlich Glas, erhält er infolge der Doppelbrechung ein doppeltes Streifensystem, das sich nur unter Benutzung eines Analysators trennen läßt. *Fabry* hat dieses Verfahren im wesentlichen nur vorgeschlagen und die Ausführbarkeit an einem einzigen Versuch bestätigt, aber noch nicht die Bestimmung der Spannungen an einem Beispiel wirklich durchgeführt.

3. Das neue Verfahren [12]. Mit dem in der vorliegenden Arbeit angegebenen Verfahren wird die Bestimmung der Spannungssumme weiter vereinfacht, so daß sie bezüglich des zeitlichen und apparativen Aufwandes den üblichen spannungsoptischen Methoden nicht mehr nachzustehen braucht. Es benutzt wie *Fabry* die in dem Modell selbst entstehenden Interferenzen gleicher Dicke, und zwar zunächst im reflektierten Licht. In derselben Weise wie in einer Luftschicht [13] interferieren jeweils zwei entsprechende an der Vorder- bzw. Rückseite der Platte reflektierende Lichtstrahlen. Dadurch, daß man — ähnlich wie *Sinclair* — ein Material verwendet, das eine große elastische Verformbarkeit (kleinen Elastizitätsmodul) mit einer kleinen spannungsoptischen Konstante verbindet, z. B. Plexiglas, erhält man nun bei nicht zu hohen Belastungen nur ein einziges Streifensystem. Wenigstens konnte in allen beobachteten Fällen die Zahl der Ordnungen auf einen ausreichenden Wert gebracht werden, ohne daß Doppelbrechung auftrat. Berechnet man die Zahl der Streifen, die bei der äußerst zulässigen Belastung an der Elastizitätsgrenze [14] $\sigma_{el} = 100\ \mathrm{kg/cm^2}$ entstehen, so erhält man für eine Plattendicke von 1 cm und $\lambda = 589\ \mathrm{m}\mu$ rund eine Isochromate und 50 Isopachen. Bei der üblichen Zahl der Isopachen (10 bis höchstens 20) —

---

[1] vgl. Kap. 3 S. 76.
[2] *F. Tank*, Helv. phys. Acta **9** (1936), S. 611.
[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 73.
[4] Bei *Favre* und *Tank* fehlt das von der Dickenänderung abhängige Glied.
[5] *D. Sinclair*, Proceedings Tenth Semi-Annual Eastern Photoelasticity Conference December 9, 1939, S. 8; *D. Sinclair*, Phys. Rev. (2) **57** (1940), S. 564; *D. Sinclair and P. B. Bucky*, Trans. Am. Inst. Mining and Metallurgical Eng. **139** (1940), S. 224.
[6] *F. W. Bubb*, Journ. Opt. Soc. Am. **30** (1940), S. 297.
[7] *D. Sinclair*, Journ. Opt. Soc. Am. **30** (1940), S. 511.
[8] *H. B. Maris*, Journ. Opt. Soc. Am. **15** (1927), S. 207.
[9] *V. Tesar*, Rev. d'Opt. **11** (1932), S. 97.
[10] *M. M. Frocht*, Journ. Frankl. Inst. **216** (1933), S. 73; — Proc. 5th Int. Congress Appl. Mech. New York 1939, S. 221; Journ. Appl. Phys. **10** (1939), S. 248; vgl. auch Fußnote 2 von Seite 73.
[11] *Ch. Fabry*, C. R. Acad. Sci. **190** (1930), S. 457.
[12] In dem Buch von *A. Kuske*, (Fußnote 2 von S. 73), S. 35, Z. 4 und 5 von oben, sind die hinweisenden Zahlen zu vertauschen.
[13] Vgl. *R. Landwehr* u. *G. Grabert*, Ing.-Arch. **18** (1950), S. 1.
[14] *A. Kuske* gibt in seinem Buch S. 38 für eine Belastung von 5 bis 10 min. Dauer 150 kg/cm² als äußerste Grenze an, bevor merkliches Kriechen eintritt.

man arbeitet meist noch am Anfang des elastischen Bereichs — kann die Doppelbrechung also höchstens nur eine ganz geringe Verbreiterung der Streifen bewirken. Da die Interferenzerscheinungen an das Modell gebunden sind, fällt ferner die durch die Unsicherheit der Lage, z. B. bei *Frocht*, sich ergebende Unbestimmtheit fort. Dadurch, daß das Lichtbündel direkt an der Rückseite des Modells reflektiert wird, ist die mögliche Versetzung zwischen dem hin- und zurückgehenden Strahl, die bei einigen anderen Verfahren auftritt[1], auf ein Minimum zurückgeführt.

Zur Erzeugung und Auswertung der Interferenzen ist unter Umständen schon eine einfachere Anordnung ausreichend, wenn man die nötigen Bedingungen einhalten kann. Für das Auftreten eines genügend scharfen Interferenzstreifensystems ist erforderlich, daß das monochromatische Licht möglichst senkrecht und ausreichend parallel auf das Modell fällt. Um in einer Platte von 1 cm Dicke noch ein deutliches Streifensystem zu erhalten, verlangt die Kohärenzbedingung bei einem senkrechten Auffall des Achsenstrahls, daß die Abweichungen von der Senkrechten nicht mehr als 14 Bogenminuten betragen. Bei einem Auffallswinkel von 1° ist die Toleranz sogar nur 1,5 Bogenminuten[2]. Die Beobachtung erfolgte im reflektierten Licht. Natürlich kann das Verfahren mit Hilfe einer geeigneten Anordnung auch in der schon von *Fabry* angegebenen Weise in durchfallendem Licht angewandt werden. Dazu ist das Modell durchlässig zu verspiegeln. Bei Benutzung von Mehrfachinterferenzen ist noch eine größere Genauigkeit zu erwarten. Es empfiehlt sich, die von *Tolansky*, allerdings für die Untersuchung kleinerer Objekte, angegebenen Hinweise und Forderungen zu beachten[3].

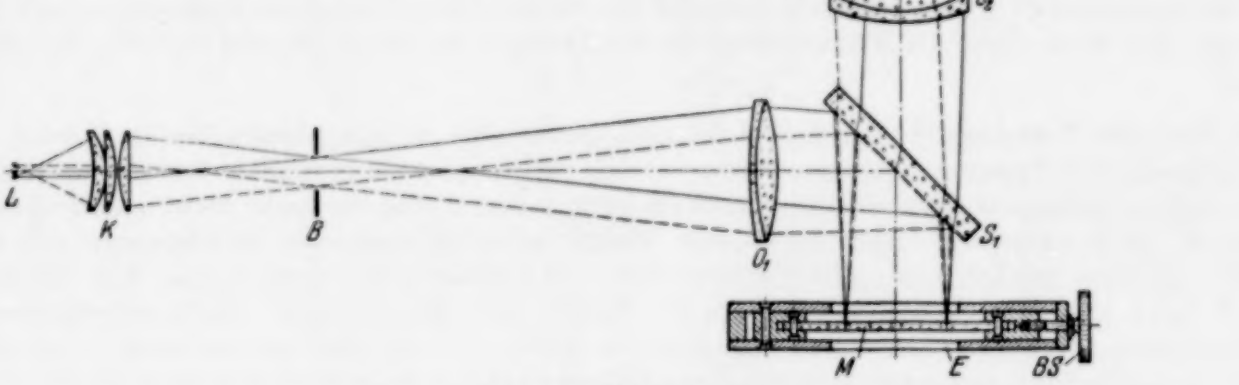


Abb. 1. Versuchsanordnung.

4. Benutztes Gerät. Als besonders geeignet erwies sich das große Interferenzgerät der Askania-Werke, Berlin, bei dessen Konstruktion auf die Möglichkeit der Beachtung der geforderten Bedingungen besonderer Wert gelegt wurde[4]. Als Lichtquelle dienten Spektrallampen der Firma Osram. Für die vorliegende Untersuchung wurde das Licht der roten Kadmiumlinie ($\lambda = 644\,\mathrm{m}\mu$) benutzt (Cd.-Lampe + Filter Schottglas RG 1, 2 mm), da man hiermit in dicken Schichten die schärfsten Interferenzen erhielt. Abb. 1 zeigt den Strahlengang der Versuchsanordnung. Die Bogensäule L der Lampe wird bei dem Gerät auf eine Irisblende B in der Brennebene der großen Beleuchtungslinse 0_1 abgebildet, die das Lichtbündel mehr oder weniger parallel machen. Das Bündel fällt dann nach Reflexion an einer halbdurchlässig verspiegelten Fläche S_1 von oben auf das Modell M. Nach Reflexion an dem Modell durchsetzt das Bündel den durchlässigen Spiegel und gelangt in den Beobachtungskopf. Mit Hilfe besonderer Ansätze kann das Modell zusammen mit dem Interferenzstreifensystem nun entweder — je nach Wahl des Okulars, mit 1,7- oder 2,8facher Vergrößerung — beobachtet oder im Maßstab 2 : 1 (auf Plattenformat 6 × 9 cm) auf der photographischen Schicht Ph aufgenommen werden. (Bei dem neuen Gerät erfolgt der Über-

[1] Z. B. *F. W. Bubb*, (Fußnote 6 von S. 75), vgl. dazu *D. Sinclair*, Journ. Opt. Soc. Am. **30** (1940), S. 567; *F. W. Bubb*, Journ. Opt. Soc. Am. **31** (1941), S. 506.

[2] *R. Landwehr*, Optik **5** (1949), S. 355.

[3] *S. Tolansky*, Phys. Bl. **4** (1948), S. 472; Multiple Beam-Interferometry. Oxford 1948, dort weitere Literaturangaben.

[4] *R. Landwehr*, Z. Instrumentenkde. **62** (1942), S. 73. Über ein neues Gerät derselben Firma mit 4 cm freier Öffnung vgl. Druckschrift Phyo. 131.

gang von der visuellen Beobachtung zur photographischen Aufnahme einfach durch Umlegen eines Hebels.) Als zweckmäßig erwies sich auch die verzeichnungsfreie Abbildung des Objektes. Besonders vorteilhaft zur Aufnahme der Einspannvorrichtung ist der große freie Raum unterhalb des Beobachtungskopfes und der geräumige feinverstellbare Tisch. Zur sehr empfindlichen punktweisen Ausmessung der Dickenänderung bei parallelen Modellen ist die Einrichtung zur Untersuchung mit Interferenzen gleicher Neigung (*Haidinger*schen Ringen) besonders gut brauchbar.

5. Modell-Werkstoff. Ein Vergleich der spannungsoptischen Konstanten für verschiedene gebräuchliche Werkstoffe zeigt die nachstehende Tabelle 2. S_c und S_p geben die Differenz bzw. die Summe der Hauptspannungen an (unabhängig vom Vorzeichen), die für eine Streifenordnung $m = 1$ bei einer Modelldicke von 1 cm gilt. Die jeweils vorliegende wirkliche Spannung ergibt sich also durch Multiplikation mit der Zahl der Ordnungen und Division durch die Dicke (in cm). S_p wurde aus der Beziehung (1) unter Berücksichtigung, daß

$$\delta d = \frac{m \lambda}{2 n} \tag{2}$$

gilt (m Ordnungszahl der Interferenzstreifen), berechnet, wobei $m = 1$ und $d = 1$ cm gesetzt wurden. Die elastischen Konstanten[1] und der Brechungsindex n (für $\lambda = 589$ mμ) sind ebenfalls in die Tabelle aufgenommen. In der 6. Spalte sind auch noch die oft[2] angeführten Konstanten C ($= \lambda / S_{c,\ absol.}$) angegeben ($10^{-7}$ cm^2/kg ≈ 1 brewster). S_c gilt entsprechend der im allgemeinen üblichen Anordnung für durchfallendes Licht, S_p — wie im vorliegenden Falle für reflektiertes Licht (für durchfallendes Licht sind die Zahlen zu halbieren). Man erkennt die geringere spannungsoptische Wirksamkeit bei Glas und Plexiglas und die noch wesentlich geringere bei Lucite (Spalte 6 und 7), dagegen die große interferenzoptische Empfindlichkeit bei allen Kunstharzen (Spalte 8).

Besonders geeignet für die Feststellung der Spannungssummen ist also Lucite. Aber auch Plexiglas läßt sich, wie die vorliegenden Versuche zeigen, noch gut verwenden. Die Methyl-Methakrylharze haben allgemein vor den Kunststoffen der Phenol-Harzgruppe voraus, daß sie geringere Eigenspannungen haben und sich ihr Spannungszustand über längere Zeit hinweg unverändert erhält. Eine elastische Nachwirkung machte sich bei den Interferenzversuchen nicht bemerkbar. Wegen der sich ausschließenden Forderungen ist es für genauere Messungen wohl unvermeidlich, für die Beobachtung der Isochromaten und der Isopachen zwei verschiedene Modelle zu benutzen. Schon zur Bestimmung der Isoklinen ist ein Modell aus einem optisch weniger empfindlichen Material angebracht. Wegen seiner guten Eigenschaften hat sich gerade Plexiglas hierfür als besonders geeignet erwiesen. Im vorliegenden Fall wurden für die spannungsoptischen Versuche Modelle aus Dekorit oder Trolon und für die interferenzoptischen solche aus Plexiglas verwandt. Höchstens für angenäherte Untersuchungen unter Verzicht auf höhere Ordnung ließe sich wahrscheinlich mit einem einzigen Modell aus einem Werkstoff mittlerer spannungs- und interferenzoptischer Empfindlichkeit, wie z. B. Reilit, auskommen. Doch konnte dies bisher nicht näher untersucht werden. Reilit erwies sich übrigens im spannungsoptischen Versuch nahezu unabhängig von der Dauer der Krafteinwirkung.

6. Modell-Gestalt. Da die Modelle so planparallel wie möglich sein müssen, wurden die handelsüblich gelieferten Plexiglasplatten mit Hilfe eines Prüffernrohrs der Firma Askania, das die Keilwinkel mit einer Genauigkeit von mehreren Sekunden zu messen gestattet, aussortiert. Auf den ausgesuchten Platten wurden dann die Stellen mit dem geringsten Keilwinkel angezeichnet. Die weitere Überprüfung der Platten erfolgte dann mit dem Interferenzgerät. Abb. 2 zeigt einen

---

[1] Der Elastizitätsmodul ist abhängig von der Art und Dauer der Belastung. Z. B. gilt der in Zahlentafel 1 für Plexiglas genannte Wert von 32000 kg/cm^2 (nach freundlicher Mitteilung der Fa. Röhm & Haas) für eine Belastungsdauer von etwa 1 min. Bei steigender Belastungsdauer tritt eine merklich größere Dehnung und damit eine Verminderung des Elastizitätsmoduls auf. In einem dynamischen Versuch ergeben sich völlig andere Werte, z. B. für Plexiglas 50000 kg/cm^2.

Außerdem ist die Temperaturabhängigkeit der mechanischen und optischen Eigenschaften zu beachten; z. B. ergeben sich nach *G. H. Lee* und *C. W. Armstrong*, Journ. Appl. Mech. **5** (1938), A. 11—12, nach Umrechnung folgende Änderungen pro 1° C

	BT 61—893	Marblette, ungehärtet	Marblette, gehärtet
ΔE in kg/cm^2	75	579	318
ΔS_c in kg/cm^2·cm	0,03	0,20	0,13

[2] Z. B. *L. Föppl*, Kap.: Spannungsmessung an Werkstücken (Ergebn. d. techn. Röntgenkde., Bd. VI), Leipzig 1938, S. 85; *G. Mesmer*. (Fußnote 2 von Seite 73). S. 117; *A. Peterlin* und *H. A. Stuart*. Doppelbrechung, insbes. künstliche Doppelbrechung (Hd.- u. Jahrbuch d. chem. Phys. Bd. 8), Leipzig 1943. S. Ib 15; *A. Kuske*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 37.

Tabelle 2. *Konstanten einiger Werkstoffe für spannungsoptische Modelle bei Zimmertemperatur (vgl. Erläuterungen in Abschnitt 5).*

Bezeichnung	Zusammensetzung	$E \cdot 10^{-2}$ kg/cm²	μ	${}^{n}D$ ($\lambda = 589$ mμ)	$\lvert C \cdot 10^{7} \rvert$ cm²/kg	S_c (transm.) kg/cm²·cm für $\lambda = 589$ mμ	S_p (refl.) kg/cm²·cm für $\lambda = 589$ mμ	$(\sigma_{el})_{max}$ kg/cm²
Schott-Glas: Type SF	Schwerflintglas	5800 [1]	0,23 [1]	1,70	1,5 [2]	392	46	300 [2]
Schott-Glas: Type F	Flintglas	5700 [1]	0,23 [1]	1,63	3,0 [2]	196	45	300 [2]
Schott-Glas: Type BK	Borkronglas	7400 [1]	0,21 [1]	1,51	3,8 [3]	155	69	300 [2]
Dekorit [4]	Phenol-Formaldehyd-Kunstharze	200 (ungeh.) 370 (gehärt.)	(0,33)	(1,63)	73,7(61,6–80,2) [5] 42,0	8 14	1,1 2,0	80 400
Marblette [6]		147—176 (ungeh.) 372 (gehärt.)	0,35—0,46	1,6	64,1—133,7 40,3	4,4—9,2 14,6	0,6—0,9 1,5—2,0	193
Bakelit [6]. BT-61-893 (Catalin 61-893)	Phthalsäureanhydrid-Glycerin-Kunstharz	432	0,365	1,573	35,5	16,57	2,2	492
Reilit [5]	Zellulose-Triazetat	342	0,31	(1,5)	9,9—10,8	55—60	2,2	—
Plexiglas	Poly-Methyl-Methakryl-Harze	320 [7]	0,35 [7]	1,492 [7]	3,1 [5]	191 [5]	2,0	100 [7]
Lucite		(420)	(0,33)	(1,5)	0,5 [8]	1210 [8]	2,4 (3,6) [8]	—

[1] Gruppenmittelwerte nach Ultraschallmessungen (*D. Kuncrt*, Glastechn. Ber. **16** (1938), S. 383. — *Cl. Schäfer* u. *L. Bergmann*, Ann. d. Phys. 6. F. Bd. 3 (1948), S. 72.
[2] *G. Mesmer*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 117.
[3] *L. Föppl*, (Fußnote 2 von Seite 77), S. 85.
[4] *E. Mönch*, Ing. Arch. **16** (1948), S. 269. — *L. Föppl* u. *E. Mönch*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 29.
[5] eigene Messungen.
[6] *M. M. Frocht*, (Fußnote 2 von S. 73), Bd. II, Tabellen 10,2 u. 10,4 (umgerechnet).
[7] Mitteilung d. Fa. Röhm & Haas.
[8] *D. Sinclair*, Journ. Opt. Soc. Am. **30** (1940), S. 513.

Ausschnitt aus einem Interferenzstreifensystem, das in einer brauchbaren Platte entsteht. Bei einem Keilwinkel von 1 Bogenminute beträgt die Zahl der auf 1 cm entfallenden Interferenzstreifen 13,5. Bei ebenen Begrenzungsflächen ist dann der Abstand zweier Streifen rund 0,74 mm. Als obere Grenze für den Keilwinkel kann etwa ein solcher von 3 Bogenminuten gelten. In diesem Fall läßt sich dann das unter Abschn. 8 angegebene Verfahren noch eben anwenden[1]. In Wirklichkeit sind die Platten natürlich unregelmäßig. Sie haben Sattelflächen und dergl. (vgl. Abb. 3). Die Plattenstücke mit besonders geringem Keilwinkel wurden zur Anfertigung der Modelle benutzt.

Bei der Übertragung der wirklichen Verhältnisse auf das Modell sind auch hier natürlich die Ähnlichkeitsgesetze zu beachten (vgl. *Mönch*[2]). Für die Bestimmung eines Formänderungsmaßstabes muß zumindest der Elastizitätsmodul bekannt sein. Er läßt sich ähnlich wie im Fall der Isochromaten mit Hilfe eines Eichversuches feststellen (s. u.). Bei der Bearbeitung eines Problems verfährt man zweckmäßigerweise so, daß man mit Hilfe der bereits bekannten Verfahren und dieses neuen die Spannungsverteilung zunächst einmal an dem Modell ausführlich untersucht und erst dann die Übertragung auf den wirklichen Zustand sinngemäß vornimmt. Die Bearbeitung der Modelle erfolgt unter Beachtung der bekannten Vorsichtsmaßregeln unter möglichster Vermeidung von Vorspannungen.

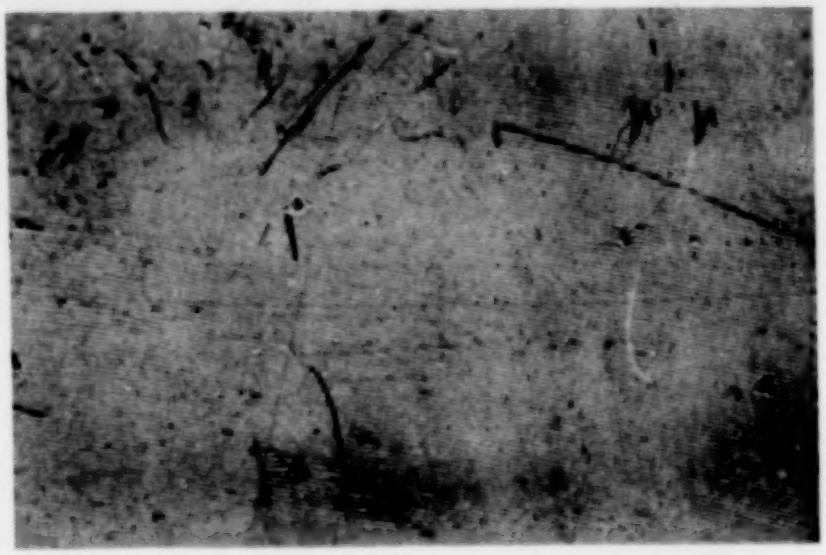


Abb. 2. Interferenzstreifensystem in einer guten Kunststoffplatte (Reilit), Dicke 5 mm, Ausschnitt. Vergr.: 1,7×.

7. Einspannvorrichtung. Zur Aufnahme der Modelle wurde ein besonderer rechteckiger Doppelrahmen gebaut (etwa 25 × 15 cm), der an den Ecken unter Verwendung von Distanzstücken zusammengehalten wurde. In diesem konnte dann auf der einen Seite die Haltevorrichtung für das Modell in geeigneter Weise mit Schrauben befestigt werden, während auf der gegenüberliegenden Seite und seitwärts Führungen für eine Belastungsschraube angebracht waren. Die Größe der Belastung wurde durch Eichung ermittelt und konnte an einer Trommel abgelesen werden. Dieser Rahmen wurde zusammen mit dem eingespannten Modell auf den Tisch des Interferenzgerätes gelegt, der zur Vermeidung jeglichen Reflexlichtes mit einem schwarzen Velourspapierstück belegt war. Die Justierung geschah dann unter Betätigung der beiden vorne an dem Tisch befindlichen Feinstellschrauben. Das Modell stand senkrecht zu dem auffallenden Strahlenbündel, wenn das Reflexbild der genannten Irisblende sich in der Mitte der Aufnahmeöffnung befand. Bei dem benutzten Gerät konnte eine genaue Kontrolle mit Hilfe des Ansatzes zur Beobachtung *Haidinger*scher Ringe erfolgen. Das Blendenbild erschien direkt in dessen Okulargesichtsfeld. — Da der Durchmesser des Gesichtsfeldes des Interferenzgerätes nur 120 mm betrug, mußten bei größeren Modellen mehrere aneinander anschließende Aufnahmen gemacht werden. Das Modell ließ sich dazu mit dem Tisch, der mit Kugellagern auf Zylindern läuft, verschieben und in jeder Stellung festklemmen, ohne daß eine neue Justierung erforderlich gewesen wäre.

8. Punktweise Bestimmung der Dickenänderung. Die Bestimmung der Dickenänderung δd des Modells läßt sich an jeder beliebigen Stelle durch visuelle Beobachtung vornehmen. Dazu zählt man nur die Zahl m der an dem betreffenden markierten Punkt unter dem Einfluß der Belastung vorbeiwandernden Interferenzstreifen. Die Form des Ausgangsinterferenzsystems ist dabei vollkommen gleichgültig. Die Dickenänderung bestimmt sich dann nach (2) für Plexiglas und $\lambda = 644\,\mathrm{m}\mu$ zu: $2{,}16 \times 10^{-5} \cdot m$ cm. Die Spannungssumme ist

$$\sigma_1 + \sigma_2 = S_p \frac{m}{d} \tag{3}$$

[1] Die Einbeziehung von Platten mit noch größeren Formfehlern läßt sich wahrscheinlich durch die Einbettung der Modelle in eine geeignete Immersionsflüssigkeit erreichen. *E. Zehender* hat ein solches Verfahren mit großem Erfolg zur Oberflächenprüfung im mikroskopischen Bereich verwandt (Z. VDI **94** (1952) S. 456).

[2] *E. Mönch*. Z. angew. Phys. **1** (1949), S. 306; *L. Föppl* und *E. Mönch* (Fußnote 2 von Seite 73), S. 74ff.

(S_p s. Tabelle 1, d in cm). Mit Hilfe eines Okularschraubenmikrometers lassen sich natürlich auch Zwischenwerte als Bruchteile eines Streifenabstandes bestimmen.

Die Bestimmung des Vorzeichens der Dickenänderung, also die Bestimmung, ob an der betreffenden Stelle Zug (+) oder Druck (—) vorliegt, ist leicht, wenn die Richtung der Dickenzunahme an dieser Stelle bekannt ist. Wenn es sich — wie in den vorliegenden Fällen — um einen größeren Keilwinkel zwischen der oberen und unteren Begrenzungsfläche (von einigen Minuten) handelt, kann dieser u. U. mit einer Mikrometerschraube vorher an dem Modell bestimmt werden. Eine optische Messung des Keilwinkels läßt sich mit dem Prüffernrohr vornehmen (vgl. Abschn. 6). Bei einer geeigneten optischen Interferenzanordnung, wie z. B. bei dem genannten Interferenzgerät, bei der die von den beiden Begrenzungsflächen reflektierten Strahlenbündel ein beobachtbares Bild einer definierten Blende oder Marke liefern, läßt sich auch aus deren Lage zueinander die Lage des Keilwinkels bestimmen. Nur muß vorher festgestellt werden, welche Fläche an dem Zustandekommen des betreffenden Reflexbildes beteiligt ist. Zu diesem Zweck kann man die Reflexion der unteren Fläche herabsetzen bzw. ganz auslöschen, indem man die Fläche anhaucht oder ein Stück schwarzen Seidenpapiers mit einem Öltropfen andrückt.

Bewegen sich nun bei Belastung die Interferenzstreifen in Richtung auf das dünnere Ende der Platte zu, so bedeutet das eine Dickenzunahme. An der betreffenden Stelle herrscht also eine Druckspannung. Wandern die Interferenzstreifen dagegen zu den dickeren Stellen, so zeigt das eine Abnahme der Dicke, also das Vorhandensein einer Zugspannung an. Da sich das Streifensystem als Folge der Belastung höchstens um etwa 20 Streifen, im allgemeinen aber um weniger, verschiebt, läßt sich die Frage, ob die Streifenordnung zu oder abnimmt, meistens leicht aus dem Vergleich mit dem Streifenverlauf im Ausgangszustand entnehmen. Ist das Vorzeichen der Dickenänderung an einer Stelle des Modells von vornherein aus anderen Überlegungen bekannt, so kann man von dort ausgehend die Vorzeichen an den übrigen Stellen bestimmen. Beim Überschreiten einer Null-Isopache ($\delta d = 0$) kehrt sich das Vorzeichen um. Sind die Modelle sehr gut parallel, d. h. ist ihr Keilwinkel kleiner als 30 Bogensekunden, so läßt sich eine sehr genaue punktweise Messung der Größe und des Vorzeichens der Dickenänderung bei dem benutzten Gerät mit Hilfe des Ansatzes zur Beobachtung der *Haidinger*schen Ringe vornehmen. Die oben erwähnte Blende dient dann zur Einengung der Meßstelle. Bei einer Zunahme der Dicke um $\lambda/2n$ quillt gerade ein Ring aus dem Zentrum hervor. Mit dem Okularschraubenmikrometer sind in diesem Falle noch ganz geringe Dickenunterschiede (1×10^{-7} cm) zu messen.

9. Ermittlung des ganzen Feldes der Isopachen. Das ganze Feld der Isopachen würde man in dem Modell direkt erhalten, wenn es so vollkommen planparallel hergestellt werden könnte, daß es ohne Belastung fast gar keine Streifen mehr zeigen, also im wesentlichen nur hell oder dunkel erscheinen würde. Bei Belastung würden dann die Interferenzen gleicher Dicke direkt die Linien gleicher Dickenänderung = Isopachen darstellen. Die Herstellung eines derart optisch planparallelen Modells verlangt aber einen außerordentlichen Aufwand. Die zu diesem Zweck vorgenommenen Versuche über eine weitere Bearbeitbarkeit der Flächen konnten jedoch nicht fortgesetzt werden. Sie zeigten zunächst nur, daß es (unter Benutzung des Poliermittels Plexipol) gelang, gut ebene Flächen zu polieren, wobei allerdings die Parallelität der Platte verloren ging.

Da aber nur die Dickenänderung von Interesse ist, kann man auch für den Fall, daß die Modellplatte einen kleinen Keilwinkel hat oder die Begrenzungsflächen überhaupt unregelmäßiger sind, einen Kunstgriff anwenden. Voraussetzung ist nur ein einigermaßen deutliches Interferenzstreifensystem im Ausgangszustand. Man kombiniert eine photographische Aufnahme des Modells im belasteten Zustand (verschobenes Interferenzsystem) mit einer solchen des unbelasteten Modells (unverschobenes Interferenzsystem). Allerdings dürfen die Gestaltänderungen nicht zu groß sein, sonst tritt bei der Überlagerung eine Verschiebung des Isopachensystems auf[1]. Bei der

[1] Bei den bisherigen Belastungsversuchen, die weiter ausgewertet wurden, traten seitliche Verschiebungen von max. etwa 0,13 mm ein. Da die niedrigen Streifenordnungen meist einen großen Abstand haben und sich nur die höheren Ordnungen enger zusammendrängen, ist der prozentuale Fehler fast immer von derselben Größenordnung und beträgt nicht mehr als 5%, meist sogar wesentlich weniger. Nur in den wenigen ganz ungünstigen Fällen, in denen auch die Streifen kleiner Ordnung sehr geringen Abstand haben und zudem senkrecht zur Verschiebungsrichtung liegen, kann ein Fehler von einer halben Ordnung auftreten. — Die schnelle Wanderung des Systems der Überlagerungsstreifen bei Verschiebung der beiden zur Deckung gebrachten Bilder ist nur eine Eigenschaft der Moirée-Streifen, die auch anderweitig benutzt werden kann (z. B. *H. Voigt* „Optik" **9** (1952), S. 438), und bedeutet nur einen Wechsel von hellen zu dunklen Streifen, hat aber — bis auf den vorgenannten allenfalls auftretenden Einfluß — keine grundsätzliche Änderung des Streifensystems zur Folge.

starken Deformierbarkeit der Kunstharze genügen im allgemeinen schon geringere Belastungen, um eine ausreichende Dickenänderung zu erreichen. Im vorliegenden Fall wurde meistens so verfahren, daß man von einer der Aufnahmen — vornehmlich von der des unbelasteten Zustandes — eine Kontaktkopie herstellte und diese dann (Schicht auf Schicht) mit der Aufnahme des belasteten Zustandes zur Deckung brachte. Als Kriterium kann das Aufeinandertreffen der Abbildungen eines Kratzers oder dergleichen dienen. Auf der Vergrößerung in einem Vergrößerungsapparat erscheint dann deutlich ein System von Überlagerungsstreifen (*Moirée*-Effekt), das unabhängig von der Form des zugrundeliegenden Interferenzstreifensystems ist[1]. Die Überlagerungsstreifen sind besonders deutlich bei einem relativ engen, aber noch scharfen Interferenzstreifensystem. Sie sind ferner um so schärfer, je kleiner ihr Abstand ist und je mehr sie zur Richtung der Interferenzstreifen senkrecht verlaufen. Abb. 3 zeigt eine solche Vergrößerung,

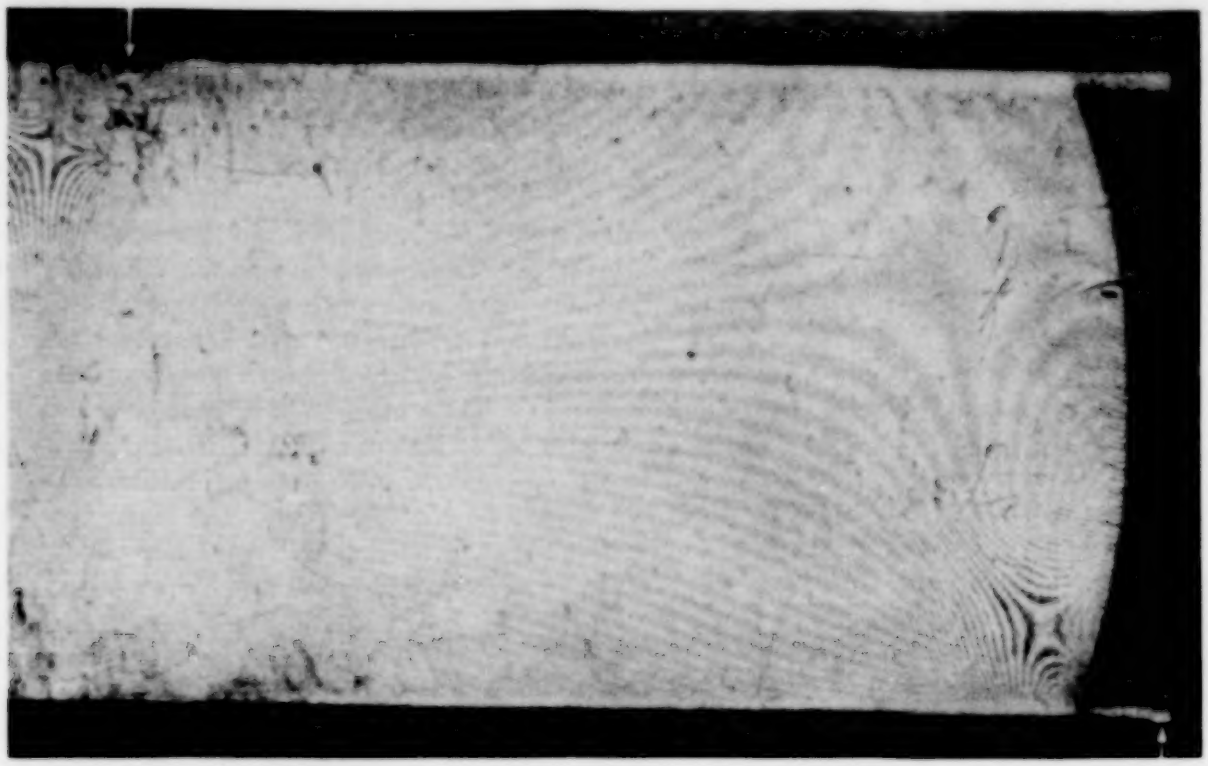


Abb. 3. Isopachensystem in einem Balken auf zwei Stützen mit Mitteleinzellast, Ausschnitt. Vergr.: 1,7 ×.

und zwar das eine Ende eines Balkens auf zwei Stützen mit einer Einzellast in der Mitte als Belastung. Nach einer solchen Vergrößerung wurde die in der vorläufigen Mitteilung[2] gebrachte Zeichnung angefertigt, nur wurde dort der Übersichtlichkeit halber jede zweite Isopache fortgelassen. Die Modellplatte hatte die Dimensionen 40 × 130 × 7 mm. Man erkennt deutlich in dem Ausgangsinterferenzsystem zwei Sattelflächen, die aber das symmetrische Überlagerungssystem in keiner Weise stören. Das auftretende Isopachennetz ist also unabhängig von dem Abstand der Interferenzstreifen.

Daß das durch Überlagerung entstehende Streifensystem wirklich ein System gleicher Dickenänderung, also ein System von Isopachen ist, erkennt man direkt aus der folgenden Abb. 4. Die Ordnung eines mittleren Streifens des Ausgangsinterferenzsystems sei k (die Dicke also $k \cdot \lambda/2n$), die Ordnung eines mittleren Streifens des durch Belastung verschobenen Systems sei $k + m$ (Dicken*änderung* also $m \cdot \lambda/2n$). Die Ordnungszahl der Kreuzungsstellen beider Systeme ist jeweils die Differenz der Ordnungen der beiden sich schneidenden Interferenzstreifen. Daraus ergibt sich eine Schar von Linien gleicher Dickendifferenz (= Isopachen) mit den Ordnungen $\ldots m-1, m, m+1 \ldots$ (unabhängig von der Ordnung k des Ausgangssystems). Die Dicken selbst bzw. deren Unterschiede erhält man daraus durch Multiplikation mit $\lambda/2n$ (n Brechungsindex des Modellmaterials). Bei der Auswertung muß man darauf achten, in welcher Weise die beiden Aufnahmen zur Deckung gebracht werden. Man muß die folgenden Möglichkeiten unterscheiden: a) bei direkter Betrachtung von 2 Originalen sind die Isopachen die hellen Streifen. b) bei Ver-

[1] Nach freundlicher Mitteilung von Herrn Prof. *Mesmer* (*St. Luis*/USA) und Dr. *Drouven* (Frankfurt), kann man vereinfachender Weise beide Zustände auf derselben photographischen Platte aufnehmen.

[2] *R. Landwehr* und *A. Dose* (Fußnote * von Seite 73).

größerung von zwei übereinanderliegenden Originalen sind die Isopachen die schwarzweißen (hellen) Streifen zwischen dem dunklen Übergangsgebiet, c) bei direkter Betrachtung der Kombination eines Originals mit einer Kopie liegen die Isopachen zwischen den hellen Überlagerungsstreifen, d) bei Vergrößerung dieser Kombination liegen die Isopachen im Übergangsgebiet, das sind aber hier die hellen Streifen (zwischen den schwarzweißen Gebieten).

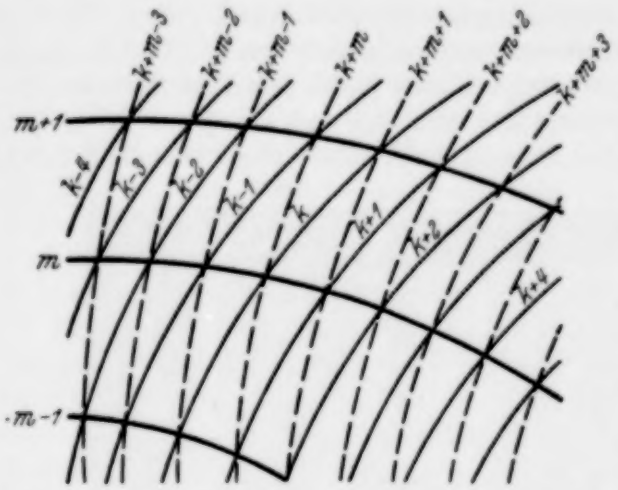


Abb. 4. Nachweis der Überlagerungsstreifen als Isopachen.

10. Ermittlung des Streifenwertes. Sind die elastischen Konstanten genügend genau bekannt oder nach anderen Verfahren zu bestimmen, so läßt sich der interferenzoptische Spannungswert S_p direkt mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) für $m = 1$ und $d = 1$ cm berechnen (vgl. Tabelle 1). Für $\lambda = 644\ \mathrm{m}\mu$ ist $S_p = 1{,}96\ \mathrm{kg/cm^2 \cdot cm}$. Dabei ist aber auf die erwähnte Abhängigkeit der Konstanten von Temperatur und Belastungsdauer zu achten. Deshalb ist es zweckmäßiger, einen Eichversuch anzustellen, indem man eine einfache, definierte Belastungsprobe an einem Modell aus demselben Material und von derselben Dicke unter denselben Bedingungen wie das Hauptmodell vornimmt und für genügende Temperaturkonstanz während des ganzen Versuches sorgt. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurde ein Versuch mit einem Zugstab gemacht, der in demselben Einspannrahmen belastet werden konnte. Die Dimensionen des Stabes waren: Länge 116 mm, Breite an den beiden Einspannenden 30 mm, Länge des geraden Mittelteiles ungefähr 70 mm und Breite in der Mitte 14,8 mm. Der Stab war aus derselben Platte hergestellt wie das Modell des Hauptversuches (Platte 801, Dicke 8 mm). Eine visuelle Messung ergab für den Streifenwert bezogen auf die Dicke 1 cm bei $\lambda = 644\ \mathrm{m}\mu$ als Mittel aus zwei Einzelmessungen 1,99 kg/cm² (für $d = 0{,}8$ cm : 2,49 kg/cm²). Die Streuung (von $\pm$ 15%) der einzelnen an verschiedenen Stellen aufgenommenen Meßwerte deutet darauf hin, daß es auch bei der Eichung nach Isopachen mit einem Zugstab sehr darauf ankommt, daß Belastung und Messung genau auf der Mittellinie vorgenommen werden.

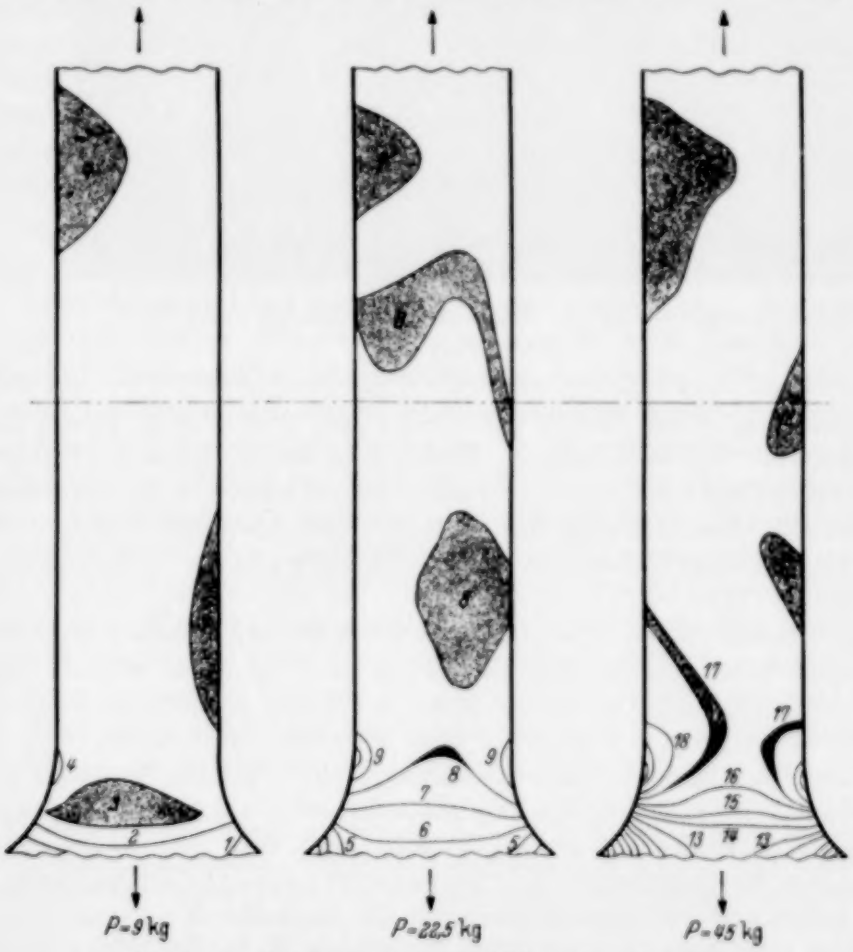


Abb. 5. Ausschnitte aus Isopachenbildern eines Zugstabes (Eichversuch). Vergr.: 1,2×.

Abb. 5 zeigt Ausschnitte aus dem in einem Zugstab entstehenden Isopachensystem bei drei verschiedenen Belastungsstufen. Ergänzt man das Isopachensystem bis zu den Nullpunkten an den scharfen Ecken, wo die Verjüngung beginnt, so erhält man für einen Punkt in der Mitte auf dem Stab einen Streifenwert von 2,32 kg/cm² bei 0,8 cm Dicke bzw. von 1,86 kg/cm² bei 1 cm Dicke. Trägt man die Zahl m der Ordnungen in Abhängigkeit von der Belastung auf, so erhält man eine Gerade durch den Nullpunkt, also eine sehr gute Proportionalität (Abb. 6). Bei bekanntem Spannungswert und bei bekannter *Poisson*scher Zahl kann man natürlich mit Hilfe der genannten Beziehung aus der gemessenen

Spannungssumme den Elastizitätsmodul bestimmen. Aus dem gemessenen Streifenwert findet man im vorliegenden Fall einen Elastizitätsmodul von rund 30 200 kg/cm².[1]

11. Einige allgemeine Eigenschaften der Isopachen[2]. Entsprechend der Größe der spannungsoptischen Konstanten (vgl. Tabelle 2) treten bei derselben Randspannung im Fall der Isopachen weniger Streifen auf als im Fall der Isochromaten. Außerdem erfolgt die Zu- oder Abnahme auf Grund ihrer Bestimmungsgrößen im allgemeinen auch weniger steil, als das bei den Isochromaten der Fall ist[3]. Eine besonders wichtige Rolle spielen die Null-Isopachen, also die Linien, längs deren die Summe der Hauptspannungen verschwindet, d. h. also, wo die beiden Hauptspannungen entgegengesetzt gleich sind. Es sind die Linien, die die Gebiete, in denen Zug und Druck vorherrschen, voneinander trennen.

In dem Momenten-Nullpunkt eines rechteckigen auf Biegung beanspruchten Balkens ist bei verschwindender Normalkraft stets die Spannungssumme Null, wie sich leicht aus der Bildung der Spannungssumme nach den entsprechenden Ansätzen ergibt[4].

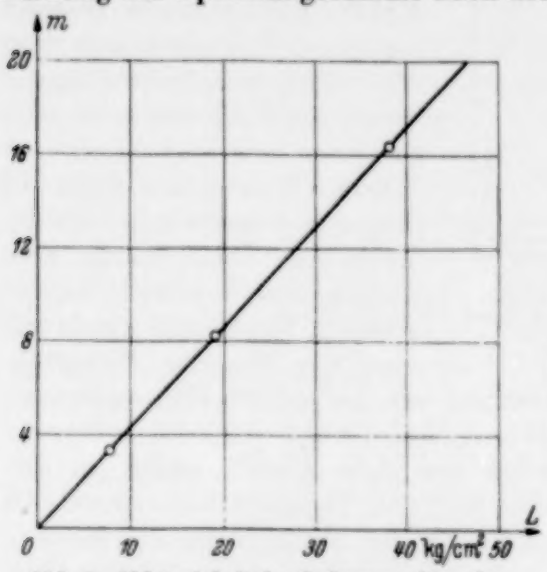


Abb. 6. Abhängigkeit der Ordnungszahl m der Isopachen von der Belastung (Nennlast).

Auch im Isopachennetz sind singuläre Punkte ausgezeichnete Punkte. In ihnen stehen Isochromaten und Isoklinen (Linien gleicher Hauptspannungsrichtung) aufeinander senkrecht, falls nicht beide Hauptspannungen einzeln gleich Null sind. Vorspringende Ecken sind sowohl singuläre Punkte der Hauptspannungslinien als auch der Isopachen. Im allgemeinen fallen aber singuläre Punkte der Isopachen nicht mit solchen der Hauptspannungslinien zusammen. Man unterscheidet auch bei den Isopachen singuläre Punkte verschiedener Ordnungen. Die singulären Punkte 1. Ordnung haben vier aufeinander senkrechte Asymptoten an die Isopachen. Singuläre Punkte zweiter Ordnung haben 6 verschiedene unter 60° versetzte Asymptoten.

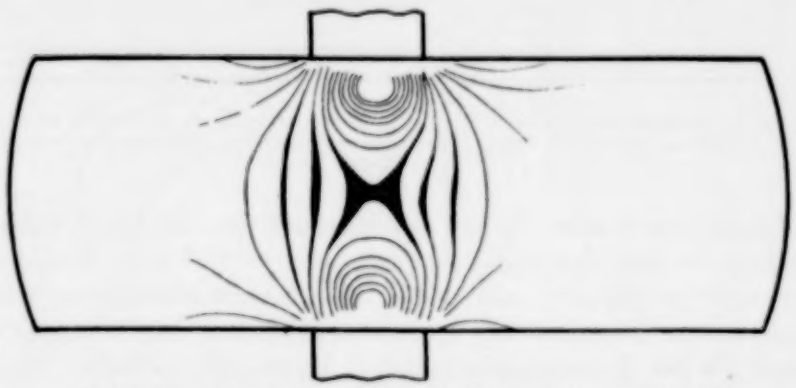


Abb. 7. Isopachensystem in einem Balken zwischen zwei ebenen Belastungsstempeln.

Ist ein freier Rand gradlinig, so haben Isochromaten und Isopachen die gleiche Richtung (die Isokline fällt mit dem Rand zusammen). Steht die Isokline aber auf dem Rand senkrecht, so verlaufen die Isochromaten und die Isopachen parallel zum Rand. An diesen Stellen hat die Randspannung σ_1 ihren größten (positiven oder negativen) Wert, während die Spannung σ_2 an den lastfreien Rändern verschwindet.

12. Beispiele. Zur Orientierung wurde das System der Überlagerungsstreifen in einigen Fällen erzeugt, bei denen der Verlauf des Isopachensystems bereits weitgehend bekannt ist. Abb. 7 zeigt das Isopachensystem, das in einem Balken (Modell aus Plexiglas) zwischen zwei ausgedehnten Lasten auftritt. Da ein harter Stahlstempel mit ebenen Endflächen (von 16 mm Breite) benutzt wurde, greift die Last nicht gleichmäßig über den Querschnitt der Angriffsfläche an, sondern nimmt nach den Enden der Laststrecke zu[5].

---

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 77; *H. Peukert* gibt für ungerecktes und unbelastetes Plexiglas vom Typ M 33 an: $E = 30400$ kg/cm² [Z. VDI. **93** (1951), S. 382].

[2] Vgl. *M. M. Frocht*, (Fußnote 2 von Seite 73), insbes. aber *L. Föppl* und *H. Neuber*, (Fußnote 2 von Seite 73).

[3] *M. M. Frocht*, Journ. Appl. Phys. **10** (1939), S. 255.

[4] *G. Mesmer*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 178 ff; *L. Föppl* und *E. Mönch*. (Fußnote 2 von Seite 73), S. 46 ff.

[5] *E. G. Coker* und *L. N. G. Filon*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 354; *G. Mesmer*. (Fußnote 2 von Seite 73), S. 197; *M. M. Frocht*, Journ. Frankl. Inst. **216** (1933), S. 82 ff. Bei gleichmäßigem Lastangriff würden die zwischen den Stempeln liegenden Isopachen zu den Enden der Laststrecke hin gehen, wie eine bereits vorliegende theoretische Durchrechnung zeigt.

Die Aufnahme der in einer Halbebene unter der Einwirkung einer Einzellast entstehenden Isopachen (Reilitplatte, Belastung über eine Schneide) ergab in Übereinstimmung mit der Theorie[1] in der Umgebung des Lastangriffspunktes Kreise durch diesen Punkt. Allerdings lieferte ein Randstreifen wegen zu großer Dickenunterschiede keine Interferenzstreifen. Von dem Fall des Balkens auf zwei Stützen mit Mittcleinzellast wurde schon in der vorläufigen Mitteilung ein Bild des auftretenden Isopachensystems gebracht. In diesem Bild befinden sich singuläre Punkte an der freien Ecke, wo $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ ist, und im Mittelpunkt der Sattelfläche in der Nähe dieser Ecke.

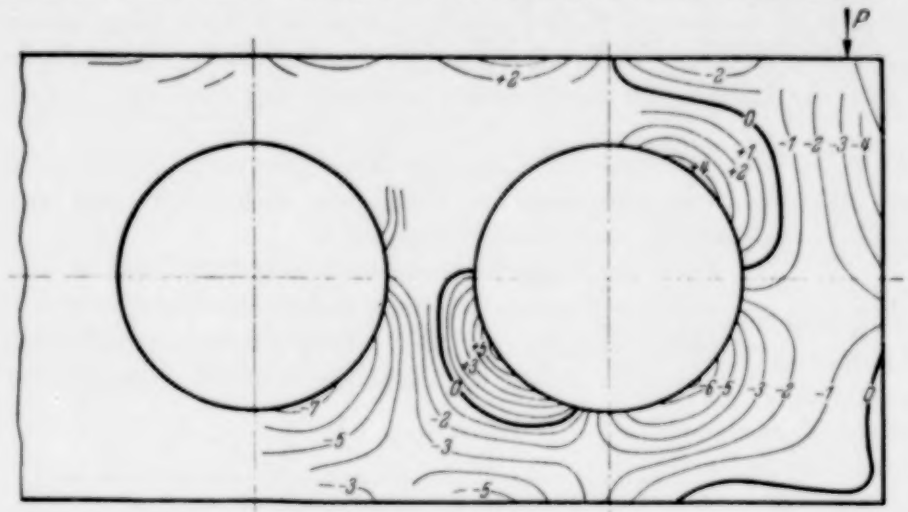
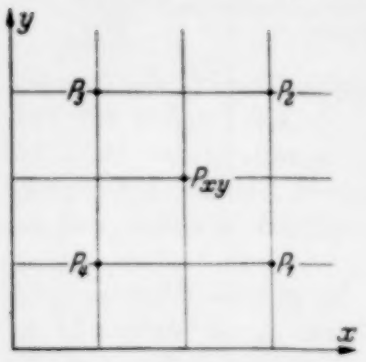


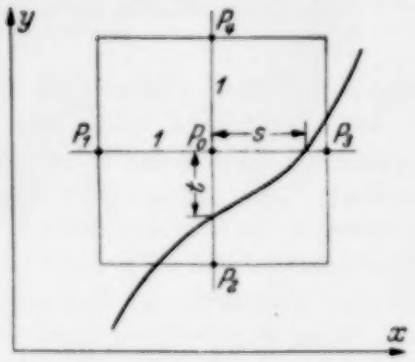
Abb. 8. Isopachensystem in einem durch eine Querkraft beanspruchten, einseitig eingespannten gelochten Träger (experimentell aus Interferenzaufnahmen an einem Plexiglasmodell erhalten).

13. Quantitatives Beispiel: gelochter Träger. Die Brauchbarkeit des Verfahrens wurde ferner noch an einem Beispiel nachgewiesen, nämlich an dem Fall eines gelochten Trägers, der auf der einen Seite eingespannt war und durch eine Querkraft am freien Ende auf Biegung beansprucht wurde. In diesem Falle wurde eine rechnerische Kontrolle durchgeführt. Das Modell wurde aus einer der besseren Plexiglasplatten von 8 mm Dicke, aus der auch der Eichstab entnommen war, hergestellt (Dimensionen: Länge — von der Einspannstelle aus — 107 mm, Breite 41 mm, drei Löcher von 25 mm Durchmesser in 33 mm Abstand). Interferenzaufnahmen wurden von dem Modell außer im unbelasteten Zustand bei drei verschiedenen Belastungsstufen (bei den Trommelstellungen 2, 10 und 24 der Belastungsschraube) hergestellt. Leider waren nur in der einen Hälfte des Modells die Interferenzstreifen einigermaßen deutlich und daher die Isopachen auch nur dort sichtbar. Abb. 8 zeigt eine Zeichnung des durch das beschriebene Überlagerungsverfahren bei der mittleren Belastungsstufe entstandenen Isopachensystems. Eine Hilfe bei der Festlegung des Isopachenverlaufes im einzelnen ist hier die bekannte Tatsache, daß am freien Rande der Löcher Zug und Druck abwechseln, also vier Nullpunkte vorhanden sein müssen. Auch lassen sich an dem Isopachenbild schon von vorneherein Stellen angeben, an denen Zug, und solche, an denen Druck herrschen muß. Aus den Aufnahmen bei verschiedenen Belastungsstufen sieht man außerdem, an welchen Stellen sich das Isopachensystem am wenigsten und an welchen Stellen es sich am meisten ändert. Auch die Festlegung der Ordnungen wird durch Aufnahmen bei mehreren Belastungsstufen erleichtert (*Mesmer* betont diesen Vorteil bei der Bestimmung der Isochromaten[2]). In der Mitte der Sattelflächen zwischen den Löchern liegen singuläre Punkte 1. Ordnung. Die Größe der Hauptspannungssumme läßt sich nun an jeder Stelle aus der angegebenen Ordnung durch Multiplikation mit dem vorher (Abschn. 10) gefundenen Streifenwert bestimmen. (Dieser beträgt für eine Dicke des Modells von 0,8 cm : 2,32 kg/cm².)



a

Abb. 9a. Zur Berechnung der Werte eines Potentialfeldes nach Gl. (4).



b

Abb. 9b. Zur Berechnung der Randwerte eines Potentialfeldes nach Gl. (5)

Um nun feststellen zu können, wieweit das experimentell gefundene Isopachenbild mit dem wirklich vorhandenen übereinstimmt, wurde das Isopachenbild herangezogen, das sich auf Grund der experimentell bestimmten Randwerte der Isochromaten berechnen läßt. Diese Berechnung be-

[1] *G. Mesmer*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 195; *D. Sinclair* and *P. B. Bucky*, (Fußnote 5 von Seite 75), S. 239.

[2] *G. Mesmer*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 139.

nutzte die Tatsache, daß die Linien gleicher Hauptspannungssumme Äquipotentiallinien darstellen, daß also die Gesetze der Potential-Theorie angewandt werden können. Vor anderen graphischen Methoden[1] hat die Rechnung den Vorzug, sich ohne besondere Schwierigkeiten durchführen zu lassen. Auch ein neuerdings von A. *Kuske*[2] angegebener zeichnerischer Weg führt erst nach der Konstruktion verschiedener Kurvenscharen zum eigentlichen Ziel.

Bei einem quadratischen Netz von Feldpunkten (Abb. 9a) gilt näherungsweise

$$u(x,y) = 1/4 \cdot (u_1 + u_2 + u_3 + u_4). \tag{4}$$

Liegt nun als Rand eine gezeichnete oder analytisch gegebene Kurve vor, so muß folgende abgewandelte Differenzengleichung verwendet werden (Abb. 9b)

$$u_0 = \frac{s\,t}{s+t}\left[\frac{1}{1+s}\,u_1 + \frac{1}{s\,(1+s)}\,u_2 + \frac{1}{1+t}\,u_3 + \frac{1}{t\,(1+t)}\,u_4\right] \tag{5}$$

(vgl. hierzu *G. H. Shortley* und *R. Weller*[3]). Da die *Laplace*sche Gleichung auch in mehrfach zusammenhängenden Bereichen Gültigkeit besitzt, so ist die Anwendung der obigen Gleichung in dem vorliegenden Falle gestattet[4].

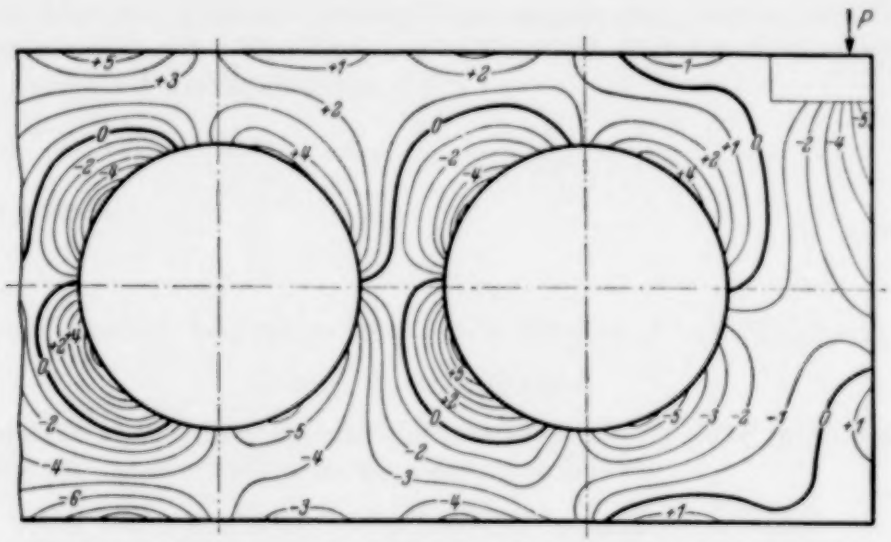


Abb. 10. Isopachensystem in einem durch eine Querkraft beanspruchten einseitig eingespannten gelochten Träger (errechnet auf Grund der Randwerte nach dem Isochromatenbild eines Trolonmodells).

Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (4) und (5) wurde dann, ausgehend von den sich aus den Isochromatenmessungen ergebenden Randbedingungen, unter Zugrundelegung eines geeigneten Netzes von Punkten, das ganze Feld der Hauptspannungssumme aufgebaut. Die Größe des Netzes ist von Bedeutung, sowohl im Hinblick auf die Konvergenz des Verfahrens, als selbstverständlich auch auf den Umfang der auszuführenden Rechenoperationen. Prüfung des Momentengleichgewichts und der Querkräfte in verschiedenen Schnitten diente zur Kontrolle.

Abb. 10 zeigt das Ergebnis dieser etwas langwierigen Rechnungen. Ihnen lagen Versuche an einem Trolon- und einem Dekorit-Modell zu Grunde. Die Übereinstimmung des gerechneten Streifensystems mit dem interferometrisch an einem Plexiglasmodell gewonnenen System (Abb. 8) ist durchaus befriedigend. Die Übereinstimmung in der Zahl der Streifen ergab sich zufällig für den gerechneten Fall und den empirisch bestimmten Fall der mittleren Belastungsstufe. Die Ordnungszahlen stimmen fast genau überein. Die Abweichungen in den Ordnungszahlen liegen im Mittel unter 4%. Wesentliche Abweichungen kommen nur am oberen Rand in der Nähe der Belastungsstelle und an der rechten Außenkante vor, was wahrscheinlich z. T. auf unterschiedliche Eigenspannungen in den beiden Modellen (Plexiglas bzw. Trolon) zurückgeht. Bei spannungsoptischen Versuchen wird man im allgemeinen mit Fehlern von 5 bis höchstens 10% rechnen

[1] Vgl. Fußnote 2 von Seite 73, insbesondere *L. Föppl* und *H. Neuber*.
[2] *A. Kuske* (Fußnote 2 von Seite 73), S. 28 ff.
[3] *G. H. Shortley* and *R. Weller*, Journ. Appl. Phys. **9** (1938), S. 334. 348.
[4] *G. H. Shortley* and *R. Weller*, Journ. Appl. Mech. Trans. ASME **6** (1939), S. A-71.

können, so daß die vorgeschlagene Methode hinsichtlich ihrer Genauigkeit den berechtigten Forderungen entsprechen wird. Einige bereits durchgeführte diesbezügliche Versuche bestätigten diese Genauigkeit des Verfahrens. Auf die Wiedergabe muß infolge des Verlustes einiger Unterlagen im Augenblick verzichtet werden. Es sei erwähnt, daß die Höhe der nach dem beschriebenen Verfahren erhaltenen Randspannungen in der Größenordnung mit den Werten übereinstimmte, die von anderen nach einem mechanischen Verfahren gewonnen wurden [1].

Die Felder der einzelnen Spannungen σ_1 und σ_2 erhält man endlich in der üblichen Weise durch Kombination des Isochromatennetzes mit dem Isopachennetz [2].

(Eingegangen am 7. August 1952.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *A. Dose*, Aachen, Eifelstraße 20;
Dr. *R. Landwehr*, Menden/Sauerland, Schattweg 36.

[1] *E. Siebel* und *E. Kopf*, Forsch. Ing. Wes. 5 (1934), Forsch. Heft 369.
[2] *E. G. Coker* und *L. N. G. Filon*, (Fußnote 2 von Seite 73), S. 178.

Die Kreisplatte auf elastischer Unterlage unter einem an starrem Mittelstück angreifenden Moment.

Von H. S. Gedizli [1].

Es sei nach Abb. 1 eine elastische, isotrope, ebene Kreisplatte vorgegeben, deren konstante Dicke h klein sei gegen ihren Halbmesser r_0. In der Mitte habe sie ein starres Stück vom Halbmesser r_1, an dem ein Drehmoment M angreife. Sie ruhe auf einer elastischen Unterlage, deren Reaktionskonstante (Baugrundziffer) c sei [2]. In der Lösung dieser Aufgabe, wie sie *Flügge* [3], *Timoshenko* [4] und später *Beyer* [5] angaben, verblieb eine unbestimmte Konstante, außerdem weicht diese Lösung für kleine Dickenverhältnisse h/r_0 und große Werte des Parameters

$$\varkappa^4 = r_0^4 \frac{c}{D} \tag{1}$$

erheblich von der Wirklichkeit ab. Dabei ist die Größe D die allgemein gebräuchliche Plattensteifigkeit. Die im folgenden gegebene Lösung führt rascher und genauer zum Ziel.

Die Differentialgleichung der Durchbiegung w einer unbelasteten Kreisringplatte auf elastischer Unterlage lautet [6] in Polarkoordinaten r, ϑ

$$\Delta\Delta\, w + \frac{\varkappa^4}{r_0^4} w = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad r_1 \leq r \leq r_0\,. \tag{2}$$

Führt man in sie mittels

$$\varrho = \varkappa \frac{r}{r_0} \tag{3}$$

die dimensionslose Veränderliche ϱ ein, geht sodann in die entstehende Gleichung mit dem Ansatz

$$w(\varrho, \vartheta) = V(\varrho) \cos\vartheta \tag{4}$$

ein und formt die entstehende gewöhnliche Differentialgleichung für $V(\varrho)$ in der von *Kirchhoff* [7] angegebenen Weise um, dann erhält man als allgemeine Lösung

$$V(\varrho) = A_1 J_{11}^{*}(\varrho) + A_2 J_{12}^{*}(\varrho) + A_3 G_{11}^{*}(\varrho) + A_4 G_{12}^{*}(\varrho) \tag{5}$$

wo $J_{11}^{*}(\varrho), \ldots, G_{12}^{*}(\varrho)$ die von *Tölke* [8] eingeführten Kombinationen von Zylinderfunktionen sind, und die Integrationskonstanten A_i mit Hilfe dreier Randbedingungen und einer Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden müssen.

Unter Berücksichtigung der Ersatzscherkraft nach *Kirchhoff* hat man am freien Rand der Platte die beiden Randbedingungen [9]

$$m_r(r_0) = 0, \qquad \bar{q}_r(r_0) = 0 \tag{6}$$

die für w auf

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right)_{r=r_0} = 0 \tag{7}$$

und

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{3-\mu}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{2-\mu}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial \vartheta^2}\right)_{r=r_0} = 0 \tag{8}$$

---

[1] Übersetzt von *R. Eppler*.
[2] *F. Kögler* u. *A. Scheidig*, Baugrund und Bauwerk, S. 59 und 185, Berlin 1948.
[3] *W. Flügge*, Bauingenieur 10 (1929), S. 221.
[4] *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells, S. 263, New York 1940.
[5] *K. Beyer*, Die Statik im Stahlbetonbau, S. 671—672, Berlin 1948.
[6] *F. Schleicher*, Kreisplatten auf elastischer Unterlage, S. 13, Berlin 1926.
[7] Siehe *S. Timoshenko*, a. a. O. S. 414—415 und insbesondere *K. Margugerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, S. 157—158 (Artikel *K. Klotter*), Berlin 1950.
[8] *F. Tölke*, Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung vom Argument $r\sqrt{i}$, S. 89—90, Stuttgart 1936.
[9] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 154—160, Wien 1948, und Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Bd. 3 S. 117—124 (Artikel *K. O. Friedrichs*), New York 1950.

führen, wobei μ die Poisson'sche Querkontraktionsziffer ist. An der Übergangsstelle zum starren Mittelstück muß ferner

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \left(\frac{w}{r}\right)_{r=r_1} \tag{9}$$

gelten. Endlich gibt noch die Gleichgewichtsbedingung zwischen dem aufgebrachten Moment M und den Reaktionskräften der Unterlage

$$M = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} c\, w\,(r\cos\vartheta)\, r\, d\,\vartheta\, d\, r$$

oder mit $\varrho_1 = \varkappa \frac{r_1}{r_0}$

$$M = \frac{\pi\, r_0^3\, c}{\varkappa^3}\left[\frac{\varrho_1^3}{4}\, V(\varrho_1) + \int_{\varrho_1}^{\varrho_0=\varkappa} V(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho\right] \equiv \frac{\pi\, r_0^3\, c}{\varkappa^3}\, M^* \,. \tag{10}$$

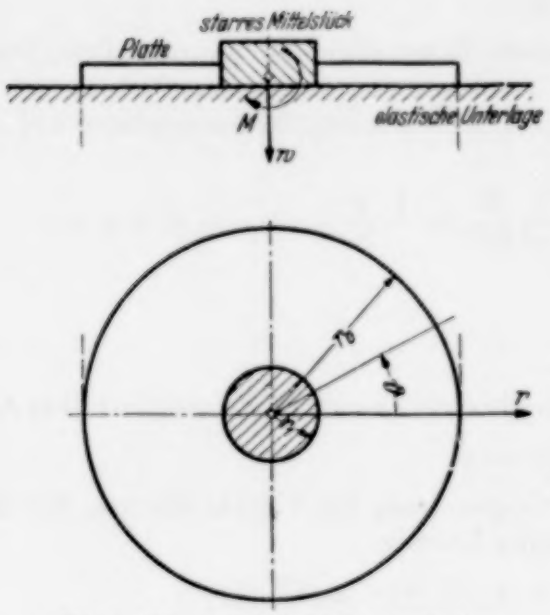


Abb. 1. Skizze des behandelten elastischen Problems.

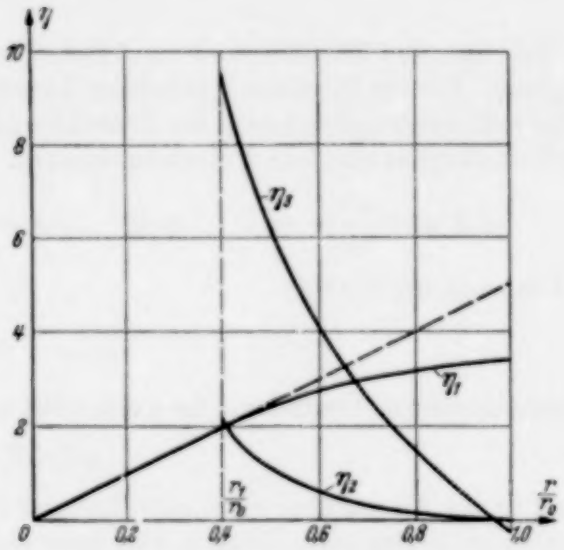


Abb. 2. Ergebnisse der Beispielrechnung:
$w = 2{,}621 \cdot 10^{-7}\, \eta_1 \cos\vartheta\, M$,
$m_r = 1{,}51 \cdot 10^{-3}\, \eta_2 \cos\vartheta\, M$,
$q_r = -1{,}68 \cdot 10^{-3}\, \eta_3 \cos\vartheta\, M$.

Die vier Randbedingungen (7) bis (10) führen auf ein System von vier linearen Gleichungen für die A_i. Zur Auflösung desselben mit Hilfe der Cramerschen Regel führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= \left[\frac{d^2 J_{11}^*}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{dJ_{11}^*}{d\varrho} - \frac{\mu}{\varrho^2}\, J_{11}^*(\varrho)\right]_{\varrho=\varkappa}, \\
F_1^* &= \left[\frac{d^3 J_{11}^*}{d\varrho^3} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d^2 J_{11}^*}{d\varrho^2} - \frac{3-\mu}{\varrho^2}\,\frac{dJ_{11}^*}{d\varrho} + \frac{3-\mu}{\varrho^3}\, J_{11}^*(\varrho)\right]_{\varrho=\varkappa}, \\
f_1 &= \left[\frac{d\, J_{11}^*}{d\varrho} - \frac{J_{11}^*(\varrho)}{\varrho}\right]_{\varrho=\varrho_1}, \\
f_1^* &= \frac{\varrho_1^3}{4}\, J_{11}^*(\varrho_1) + \int_{\varrho_1}^{\varkappa} J_{11}^*(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho\,.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Analog werden für $i = 2, 3, 4$ die Größen F_i, F_i^*, f_i und f_i^* mit den in (5) bei den A_i stehenden Funktionen gebildet. Alle diese Größen können mit Hilfe der *Tölke*schen Tafeln berechnet werden. Mit den Determinanten

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ F_1^* & F_2^* & F_3^* & F_4^* \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1^* & f_2^* & f_3^* & f_4^* \end{vmatrix}, \qquad \delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & F_2 & F_3 & F_4 \\ 0 & F_2^* & F_3^* & F_4^* \\ 0 & f_2 & f_3 & f_4 \\ M^* & f_2^* & f_3^* & f_4^* \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_4 = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & 0 \\ F_1^* & F_2^* & F_3^* & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \\ f_1^* & f_2^* & f_3^* & M^* \end{vmatrix} \tag{12}$$

wird dann die Lösung

$$A_i = \frac{\delta_i}{\delta_0}. \tag{13}$$

Als Beispiel werde eine Platte mit $\mu = \frac{1}{6}$, $\varkappa = 2{,}2$, $r_0 = 9$ m und $r_1 = 3{,}6$ m berechnet. Man findet

$$A_1 = -9{,}9226\ M^*, \qquad A_2 = -3{,}8309\ M^*, \qquad A_3 = -0{,}8918\ M^*, \qquad A_4 = 5{,}3999\ M^*$$

woraus die in Abb. 2 dargestellten Ergebnisse folgen.

Es sei noch bemerkt, daß die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen (10) nur dann in der obigen Form erfolgen darf, wenn die Platte so stark vorbelastet ist, daß sie sich nicht abheben kann. Die entsprechende Lösung ist bei *Schleicher*[1] angegeben.

(Eingegangen am 31. Juli 1952.)

Anschrift des Verfassers: *H. S. Gedizli*, Cebeci Guvey Sk. 16 A n k a r a, Türkei.

[1] *F. Schleicher*, a. a. O. S. 32.

Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitze.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Die Grenzschichtabsaugung ist ursprünglich als wirksames Hilfsmittel zur Verhinderung der turbulenten Strömungsablösung und damit zur Steigerung des Höchstauftriebes von Tragflügeln oder zur Erhöhung des Wirkungsgrades von Diffusoren angewandt worden. Später hat man erkannt, daß durch Absaugung der wandnahen Grenzschicht auch die Stabilität der laminaren Grenzschicht wesentlich gesteigert werden kann. Eine Verlängerung der laminaren Laufstrecke ergibt aber eine Verringerung der Oberflächenreibung und damit eine Verkleinerung des Widerstandes von umströmten Körpern. Dabei wird das Stabilitätsverhalten in mehrfacher Hinsicht durch die Absaugung beeinflußt. Einmal wird die Grenzschichtdicke überhaupt verkleinert, so daß jede mit einer Grenzschichtgröße (z. B. Verdrängungsdicke) gebildete *Reynolds*sche Zahl des Umschlags zur Turbulenz erst weiter stromabwärts erreicht wird. Andererseits wird aber gerade durch die Absaugung der wandnächsten Schichten das Geschwindigkeitsprofil völliger und damit die kritische *Reynolds*sche Zahl nach den vorliegenden Ergebnissen der Stabilitätstheorie für laminaren Grenzschichten wesentlich vergrößert. Darüber hinaus ist bei Absaugegrenzschichten jenseits der Stabilitätsgrenze die Anfachung der Störungen wesentlich geringer, so daß der tatsächliche Umschlag zur Turbulenz noch weiter hinausgeschoben wird. Bei sehr starker Absaugung durch Einzelschlitze kann auch der durch die Potentialströmung vorgegebene Druckverlauf beeinflußt werden, indem ein zusätzliches periodisches Senkenfeld überlagert wird. Auch dieser Einfluß wirkt stabilisierend. Jedoch sind so starke Absaugungen nicht mehr lohnend.

Bei der Grenzschichtabsaugung sind zwei Hauptarten zu unterscheiden, nämlich die kontinuierliche oder flächenhafte Absaugung an halbdurchlässigen Wänden und die diskontinuierliche Absaugung an Einzelschlitzen, die auch in großer Zahl aufeinander folgen können.

a) Kontinuierliche Absaugung. Die bisher vorliegenden Berechnungen beziehen sich fast durchweg auf kontinuierliche Absaugung längs der Wand. Die längsangeströmte ebene Platte mit homogener Absaugung, die nach einer genügend großen Anlaufstrecke zum sogenannten asymptotischen Absaugeprofil mit unveränderlicher Grenzschichtdicke führt, ist von *H. Schlichting* [1] untersucht worden. Der Anlaufvorgang selbst ist von *R. Iglisch* [2] exakt berechnet worden. Exakte Lösungen sind ferner von *H. Schlichting* und *K. Bußmann* [3] für die ebene Staupunktsströmung mit homogener Absaugung sowie für die längsangeströmte Platte mit einer Absaugegeschwindigkeit $v_0(x) \sim 1/\sqrt{x}$ untersucht worden. Für beliebige Druckverteilung und beliebige Verteilung der Absaugegeschwindigkeit hat *H. Schlichting* [4] ein Näherungsverfahren nach Art des *Pohlhausen*verfahrens bei undurchlässiger Wand entwickelt. Die Stabilität der laminaren Grenzschichten mit kontinuierlicher homogener Absaugung ist verschiedentlich [5, 6] mit dem bereits erwähnten Ergebnis untersucht worden.

Versuche mit kontinuierlicher Absaugung sind in Langley Field an einem Tragflügelmodell durchgeführt worden [7]. Das Modell war mit einer 2,4 mm starken Schicht aus gesinterter Bronze überzogen. Obwohl also das Modell nicht in aerodynamischem Sinne glatt war, konnte doch die laminare Grenzschicht über den ganzen Bereich aufrecht erhalten werden. Bei sehr hohen *Reynolds*schen Zahlen (über $6 \cdot 10^6$) war jedoch die notwendige Absaugemenge so groß, daß insgesamt kein Gewinn erzielt wurde.

---

[1] *H. Schlichting*, Luftfahrtforschung 19 (1942), S. 179 u. 293.

[2] *R. Iglisch*, Exakte Berechnung der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung, Schriften Dtsch. Ak. Luftfahrtforschung 8 B (1944), S. 1—51.

[3] *H. Schlichting* und *K. Bußmann*, Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen, Dtsch. Akad. Luftfahrtforschg. 7 *B* (1943), S. 25.

[4] *H. Schlichting*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 199.

[5] *K. Bußmann* und *H. Münz*, Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung, Jahrb. Dtsch. Luftfahrtforschung 1942 I 36.

[6] *J. Pretsch*, Umschlagbeginn und Absaugung, Jahrb. Dtsch. Luftfahrtforschung 1942 I 1—17.

[7] *A. E. v. Doenhoff* and *L. K. Loftin*, Journ. aero. Sci. 16 (1949), S. 729.

b) Diskontinuierliche Absaugung durch Einzelschlitze. Wesentlich eingehender ist das Verhalten von Grenzschichten mit einzelnen oder in großer Zahl aufeinanderfolgenden Absaugeschlitzen experimentell untersucht worden. *H. Holstein*[1] untersuchte zwei Tragflügelprofile mit einer größeren Anzahl von hintereinander in bestimmten Abständen angeordneten Absaugeschlitzen. Weitere Versuche wurden mit einer perforierten ebenen Platte durchgeführt[2], die aber wegen technischer Mängel keinen Erfolg brachten. Ferner sind zwei Arbeiten von *W. Pfenninger*[3] zu erwähnen, in denen Tragflügel mit mehreren hintereinander angeordneten Absaugeschlitzen untersucht wurden. Die zweite Arbeit von *W. Pfenninger* wurde an einem Tragflügel mit 17% Dicke durchgeführt, auf dessen Oberseite 24 und auf dessen Unterseite 16 Schlitze angeordnet waren, die nach der Hinterkante des Flügels dichter aufeinanderfolgten. *Pfenninger* schließt aus seinen Untersuchungen, daß die mit der Grenzschichtdicke gebildete kritische *Reynolds*sche Zahl durch die Absaugung nicht verändert wurde, so daß also die Wirkung der Absaugung nur auf einer Verringerung der Grenzschichtdicke und auf der Senkenwirkung der Absaugeschlitze beruhte. Weitere Versuche mit einer großen Anzahl von Schlitzen[4] haben gezeigt, daß die Schlitzbreite nicht größer als die Grenzschichtdicke sein sollte. Auch spielt die sorgfältige Bearbeitung und Glättung der Schlitzöffnungen eine wesentliche Rolle.

Rechnerisch ist nur der Fall eines einzelnen Absaugeschlitzes ausgehend von der asymptotischen Lösung näherungsweise behandelt worden[5].

Im folgenden wird die Grenzschichtentwicklung an einer ebenen Wand näherungsweise untersucht. Dabei sollen an der Wand in bestimmten Abständen Absaugeschlitze angeordnet sein. Die Absaugemenge wird als so klein vorausgesetzt, daß das Senkenfeld, das durch die Absaugeschlitze hervorgerufen wird, keinen merklichen Einfluß auf die Grenzschichtentwicklung hat. Der Druck wird also längs der Wand als konstant angenommen. Zur Berechnung wird ein Näherungsverfahren angewandt, bei dem sowohl Impulssatz als auch Energiesatz angewandt werden. Die auf diese Weise gewonnenen Grenzschichtprofile sollen dann auf ihre Stabilität untersucht werden.

2. Ableitung des Näherungsverfahrens. Bei den bekannten Näherungsverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten werden die Geschwindigkeitsprofile durch eine passend gewählte einparametrige Kurvenschar angenähert. Die Kurvenparameter und die Grenzschichtdicke werden dann mit Hilfe der *v. Kármán*schen Impulsgleichung und der aus der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung folgenden Randbedingung:

$$\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = U \frac{dU}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \tag{1}$$

berechnet. *L. S. Leibenson*[6] und *K. Wieghard*[7] haben außer der Impulsbedingung noch eine Energiebedingung aufgestellt und durch Wahl von zweiparametrigen Kurvenscharen die Rechnung verbessert, allerdings auch den Rechenaufwand vergrößert. *A. Walz*[8] hat gezeigt, daß die Rechengenauigkeit auch dann gesteigert werden kann, wenn man beim einparametrigen Verfahren Impuls- und Energiesatz erfüllt, jedoch auf die Randbedingung (1) verzichtet. Im folgenden wird ebenfalls ein einparametriger Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung benutzt. Soweit die Geschwindigkeit der Außenströmung als konstant vorausgesetzt wird, ist es aber trotzdem möglich, im schlitzfreien Bereich die Randbedingung (1) zusammen mit Impuls- und Energiesatz zu erfüllen und damit eine verhältnismäßig gute Annäherung zu erzielen.

Die Geschwindigkeitsprofile werden also in folgender Form angesetzt:

$$u/U = F(\eta, K),$$

---

[1] *H. Holstein*, Messungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht an einem Tragflügel, Ber. Lilienthal-Ges. Luftfahrtforsch. — *H. Holstein*, Messungen zur Laminarhaltung der Reibungsschicht durch Absaugung an einem Tragflügel mit Profil NACA 0012/64, Forsch. Ber. Zentr. wiss. Berichtswesen Luftfahrtforsch. Nr. 1654.

[2] *H. Holstein* und *B. Pekarek*, Messungen zur Laminarhaltung der Reibungsschicht durch Absaugung an einer perforierten ebenen Platte, Zentr. wiss. Ber. Wes. Luftfahrtforsch. UM 3222 (1945).

[3] *W. Pfenninger*, Untersuchungen über Reibungsverminderungen an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung. Mitt. Nr. 13 Inst. Aerodyn. Zürich 1946; *W. Pfenninger*, Journ. Aeron. Sci. 16 (1949), S. 227.

[4] Siehe Fußnote 7 von S. 90.

[5] *W. Wuest*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 199.

[6] *L. S. Leibenson*, Energetische Form der Integralbedingung in der Theorie der Grenzschicht (russ.). Arbeiten ZAHI. H. 240 (1935).

[7] *K. Wieghardt*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 231.

[8] *A. Walz*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 243.

wobei $K(x)$ der Profilparameter und $\eta = y/\delta(x)$ ist ($\delta(x)$ ist ein später noch definiertes Maß für die Grenzschichtdicke). Ferner führen wir folgende Größen ein:
Verdrängungsdicke:

$$\delta_1 = \delta \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \delta f_1(K), \tag{2}$$

Impulsverlustdicke:

$$\delta_2 = \delta \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \delta f_2(K), \tag{3}$$

Energieverlustdicke:

$$\delta_3 = \delta \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right) d\eta = \delta f_3(K), \tag{4}$$

Dimensionslose Dissipationsfunktion:

$$D(K) = 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial (u/U)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta, \tag{5}$$

Dimensionslose Wandschubspannung:

$$E(K) = \left(\frac{\partial u/U}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0}. \tag{6}$$

Mit diesen Abkürzungen nimmt der auf Absaugegrenzschichten erweiterte Impuls- und Energiesatz folgende Form an:

$$\frac{d(U^2 \delta_2)}{dx} - v_0 (U - u_0) = -U \frac{dU}{dx} \delta_1 + \frac{\nu U}{\delta} E, \tag{7}$$

$$\frac{d(U^3 \delta_3)}{dx} - v_0 (U^2 - u_0^2) = 2\nu \frac{U u_0}{\delta} E + \nu \frac{U^2}{\delta} D; \tag{8}$$

u_0 und v_0 sind dabei die Komponenten der Absaugegeschwindigkeit an der Wand.

Wir wenden diese Beziehungen auf die Strömung an einer mit Absaugeschlitzen versehenen ebenen Platte an. Dabei wird eine die Potentialströmung beeinflussende „Senkenwirkung" der Absaugeschlitze vernachlässigt und demnach die Außenströmung als $U = \text{const}$ angenommen. Ferner wollen wir voraussetzen, daß die Absaugung nur normal zur Wand stattfindet, so daß $u_0 = 0$ (v_0 hat einen negativon Wert!). Damit geht die Impuls- und Energiegleichung über in

$$\frac{d\delta_2}{dx} - \frac{v_0}{U} = \frac{\nu}{U\delta} E, \tag{9}$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} - \frac{v_0}{U} = \frac{\nu}{U\delta} D \tag{10}$$

oder mit $\frac{U\delta}{\nu} = Z$ und $\frac{U x}{\nu} = \xi$ sowie (3) und (4)

$$Z \frac{dZ}{d\xi} f_2 + Z^2 \frac{df_2}{dK} \frac{dK}{d\xi} - \frac{v_0}{U} Z = E, \tag{11}$$

$$Z \frac{dZ}{d\xi} f_3 + Z^2 \frac{df_3}{dK} \frac{dK}{d\xi} - \frac{v_0}{U} Z = D. \tag{12}$$

Hieraus findet man durch Auflösung nach $dZ/d\xi$ und dK/ξ

$$\frac{dZ}{d\xi} = -\frac{E f_3' - D f_2' + (v_0/U) Z (f_3' - f_2')}{Z (f_2 f_2' - f_2 f_3')}, \tag{13}$$

$$\frac{dK}{d\xi} = \frac{E f_3 - D f_2 + (v_0/U) Z (f_3 - f_2)}{Z^2 (f_3 f_2' - f_2 f_3')}. \tag{14}$$

Die Striche bezeichnen dabei Ableitungen nach dem Parameter K. Durch Division von (13) und (14) und Integration findet man schließlich

$$\frac{Z}{Z_0} = exp. \int_{K_0}^{K} - \frac{(E f_3' - D f_2') + (v_0/U) Z (f_3' - f_2')}{(E f_3 - D f_2) + (v_0/U) Z (f_3 - f_2)} dK. \tag{15}$$

3. Lösungsansatz für Geschwindigkeitsprofil. Jeder einparametrige Ansatz für die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht ist mehr oder weniger willkürlich. Man kann jedoch versuchen, sich dem erwarteten Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung möglichst gut anzupassen. Im folgenden beschäftigen wir uns vor allem mit der Entwicklung einer laminaren Grenzschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte, die an einzelnen Stellen durch Absaugeschlitze unterbrochen ist. Bei sehr großem Abstand der Absaugeschlitze wird sich das Grenzschichtprofil jeweils weitweitgehend dem *Blasius*schen Plattenprofil annähern, andererseits wird sich bei einem Absaugeschlitz sehr großer Breite der Grenzfall des „asymptotischen Absaugeprofils" ergeben. Beide Grenzfälle sollen im einparametrigen Ansatz enthalten sein. Dabei wollen wir dem Vorgang von *Schlichting*[1] folgend, das *Blasius*profil in folgender Weise annähern:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{U} &= \sin\frac{\pi}{6\,\eta} \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq 3\,, \\ \frac{u}{U} &= 1 \qquad\quad \text{für } \eta \leq 3\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

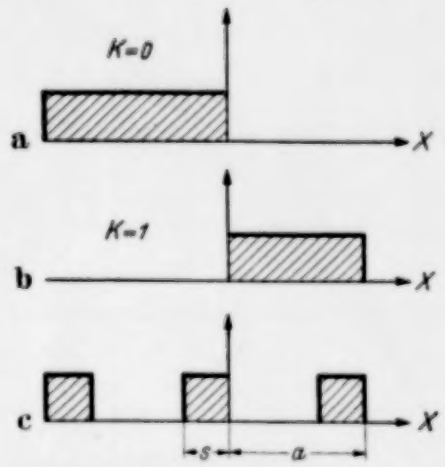


Abb. 1. Einige Sonderfälle für die Verteilung der Absaugegeschwindigkeit längs der Wand.

Das asymptotische Absaugeprofil hat andererseits die Form:

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\eta}\,. \tag{17}$$

Wenn eine bereits ausgebildete Grenzschichtsströmung in den Bereich eines Absaugeschlitzes kommt, muß man sich den Vorgang so vorstellen, daß zunächst die wandnächsten Schichten beeinflußt werden. Erst weiter stromabwärts greift die Umgestaltung auch auf die äußeren Bereiche der Grenzschicht über. Das gleiche wird auch der Fall sein, wenn der Absaugeschlitz wieder aufhört. Aus diesem Grunde werden wir für den Schlitzbereich und den schlitzfreien Bereich nicht die gleichen einparametrigen Ansätze verwenden können. Denn bei Verwendung des gleichen Ansatzes würden ja im einen Fall zuerst die äußeren Bereiche der Grenzschicht umgestaltet werden, wenn der Profilparameter rückwärts durchlaufen wird.

a) Lösung im schlitzfreien Bereich. Wir wollen zunächst annehmen, daß im Ausgangszustand das asymptotische Absaugeprofil vorhanden ist und für $x \geq 0$ (vgl. Abb. 1a) die Absaugegeschwindigkeit Null wird. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht wird sich dann in Richtung auf das *Blasius*sche Plattenprofil umgestalten, wobei offenbar zunächst die wandnächsten Schichten beeinflußt werden. Dies legt folgenden einparametrigen Ansatz nahe:

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\eta} - F(K, \eta)\,, \tag{18}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} F(K,\eta) &= K\left(1 - e^{-\eta/\sqrt{K}} - \sin\frac{\pi\,\eta}{6\sqrt{K}}\right) && \text{für } 0 \leq \eta \leq 3\sqrt{K}\,, \\ F(K,\eta) &= -\,K\,e^{-\eta/\sqrt{K}} && \text{für } \eta \geq 3\sqrt{K}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dieser Ansatz hat offenbar die Eigenschaft, daß die zweite Ableitung der Geschwindigkeit an der Wand unabhängig von K verschwindet. Für kleine Werte von K verschwindet $F(K, \eta)$ für $\eta > 3\sqrt{K}$ sehr schnell, so daß sich also Änderungen zunächst nur im wandnahen Bereich auswirken. Die Grenzschichtprofile, die sich mit diesen Ansätzen ergeben, sind in Abb. 2 für verschiedene Werte des Parameters K aufgetragen. In Tabelle 1 und 2 sind die Größen f_1, f_2, f_3, D, E zusammen mit den in (13) bis (15) gebrauchten Verbindungen für verschiedene Werte von K zusammengestellt. Es ist bemerkenswert, daß $Ef_3 - Df_2$ für $K = 0{,}968$ verschwindet. Wenn man im Ansatz (19) das exakte *Blasius*profil statt der Näherung durch die Sinusfunktion einsetzen würde, verschwände $Ef_3 - Df_2$ erst für $K = 1$. Der Parameter K darf also bei unserer Näherung streng genommen nur Werte zwischen 0 und 0,968 durchlaufen.

Wegen $v_0 = 0$ nimmt das Integral (15) folgende numerisch leicht auswertbare Form an

$$\frac{Z}{Z_0} = \exp\left\{\int_0^K -\frac{Ef_3' - Df_2'}{Ef_3 - Df_2}\,dK\right\}. \tag{20}$$

[1] *H. Schlichting*, vgl. Fußnote 4 von S. 90.

Die Lösung $Z/Z_0 = \delta/\delta_0$ ist in Abb. 3 in Abhängigkeit von K aufgetragen. Der Wert $Z_0 = \delta_0 U/\nu$ ist dabei der Grenzschichtdicke δ_0 am Anfang der schlitzfreien Strecke zugeordnet. Durch numerische Integration der Differentialgleichung (14) kann sofort der Zusammenhang zwischen K und $\xi = U x/\nu$ und damit auch zwischen Z und ξ ermittelt werden. Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Abb. 4 aufgetragen. Wenn K sich dem Wert $K = 0{,}968$ nähert, geht der Integrand gegen Unendlich. Wenn man die verschiedenen Funktionen in der Umgebung dieser singulären Stelle

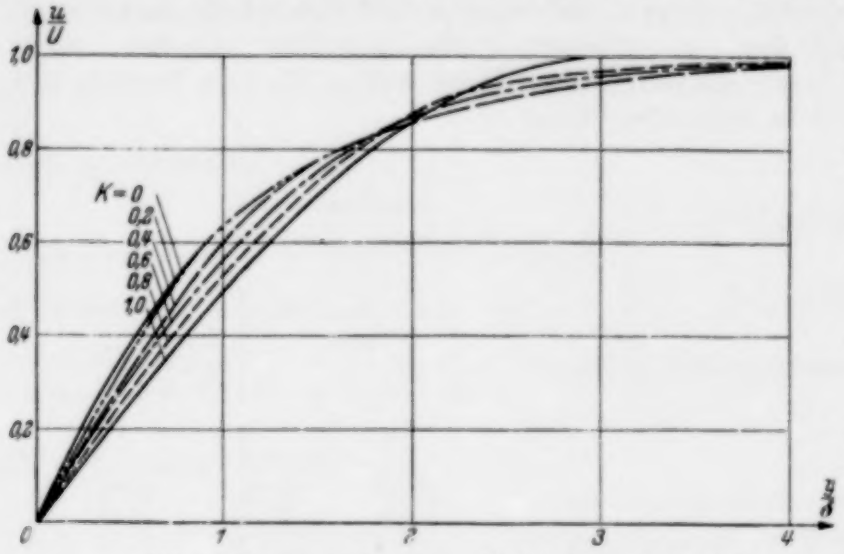


Abb. 2. Einparametrige Grenzschichtprofile nach Gl. (19) in Abhängigkeit vom Profilparameter K.

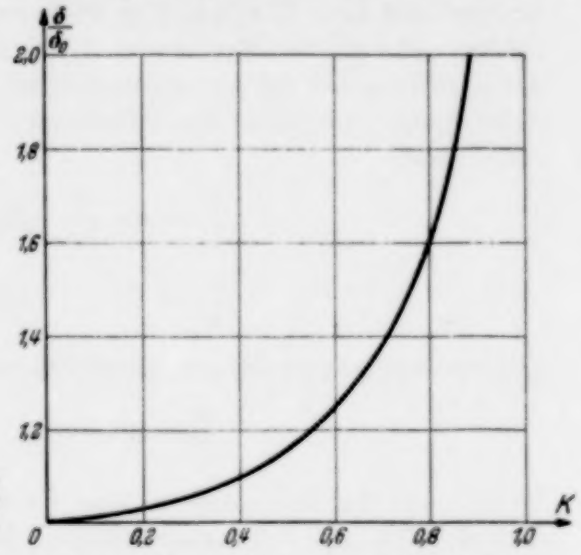


Abb. 3. Abhängigkeit der Grenzschichtdicke vom Profilparameter K im absaugefreien Bereich.

linear annähert, erhält man für große Werte von K ($0{,}8 \leq K \leq 0{,}968$) folgende Näherungsformel:

$$(\xi + 0{,}241)\, 2{,}55 \approx \left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 - 1{,}2\,\frac{Z_0}{Z}\,. \quad (21)$$

b) Lösung im Schlitzbereich. Wir wollen annehmen, daß die Grenzschicht zu Beginn des Absaugeschlitzes

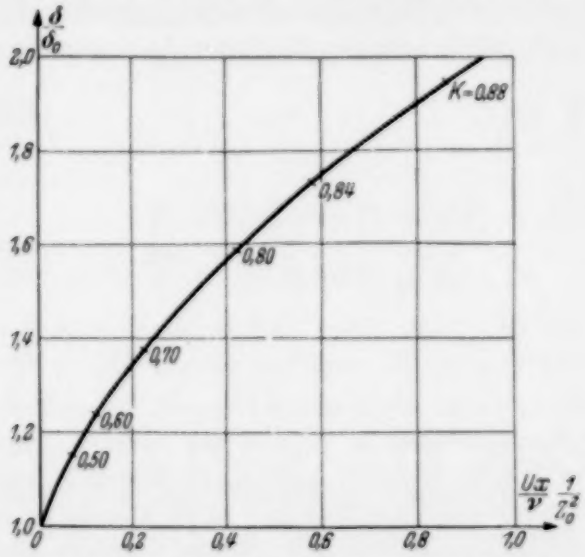


Abb. 4. Verlauf der Grenzschichtdicke für den Fall nach Abb. 1a.

Tabelle 1.

Grenzschichtgrößen in Abhängigkeit vom Profilparameter K.

K	f_1	f_2	f_3	D	E
0	1,00000	0,50000	0,83333	1,00000	1,00000
0,1	1,00285	0,4965	0,82679	0,99093	0,84935
0,2	1,00806	0,4897	0,81289	0,97534	0,78695
0,3	1,01481	0,4816	0,79527	0,95718	0,73907
0,4	1,02280	0,4726	0,77381	0,93776	0,69870
0,5	1,03187	0,4630	0,75453	0,91781	0,66313
0,6	1,04189	0,4529	0,73251	0,89792	0,63098
0,7	1,05279	0,4425	0,70847	0,87817	0,60142
0,8	1,06450	0,4319	0,68605	0,85904	0,57389
0,9	1,07696	0,4210	0,66179	0,84040	0,54805
1,0	1,09014	0,40986	0,63662	0,82245	0,52360

Tabelle 2.

K	$f_3 - f_2$	$f_2' - f_3'$	$Ef_3 - Df_2$	$Df_2' - Ef_3'$	$f_2' f_2 - f_3' f_2$
0	0,33333	0	0,33333	0	0
0,1	0,33029	0,02400	0,21024	0,0202	0,0035
0,2	0,32319	0,0640	0,16208	0,0362	0,0095
0,3	0,31367	0,0890	0,12679	0,0484	0,0155
0,4	0,30118	0,1015	0,09747	0,0512	0,0195
0,5	0,29147	0,1110	0,07499	0,0496	0,0224
0,6	0,27407	0,1175	0,05553	0,0472	0,0248
0,7	0,26078	0,1234	0,03749	0,0451	0,0266
0,8	0,25385	0,1280	0,02270	0,0426	0,0280
0,9	0,24033	0,1331	0,00888	0,0409	0,0296
1,0	0,22609	0,1370	0,00376	0,0406	0,0312

entsprechend (19) folgende Form erreicht hat:

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\eta} - F(K_1, \eta)\,.$$

Im Bereich des Absaugeschlitzes soll die konstante Absaugegeschwindigkeit $-v_0$ vorgeschen sein. Die einfachste Annahme für die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils im Bereich des Absaugeschlitzes würde darin bestehen, daß auch hier der Ansatz (19) gilt und der Parameter K

wieder von K_1 nach Null läuft. Dieser Ansatz würde aber nicht berücksichtigen, daß zunächst die wandnächsten Schichten von der Umgestaltung erfaßt werden. Besser ist daher folgender Ansatz:

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\eta} - F(K_1, \eta) + F(K, \eta)\,. \tag{22}$$

Hierbei ist die Funktion $F(K, \eta)$ wie in (19) definiert. Der Parameter K durchläuft die Werte von 0 bis K_1. Die Randbedingung (1) wird durch diesen Ansatz nicht erfüllt. Im Schlitzbereich ist also das hier angewandte Verfahren identisch mit dem einparametrigen Näherungsverfahren von *A. Walz*[1]. Für die weitere Rechnung ist dies aber nicht schwerwiegend, da es vor allem darauf ankommt, im schlitzfreien Bereich eine möglichst gute Annäherung zu erzielen.

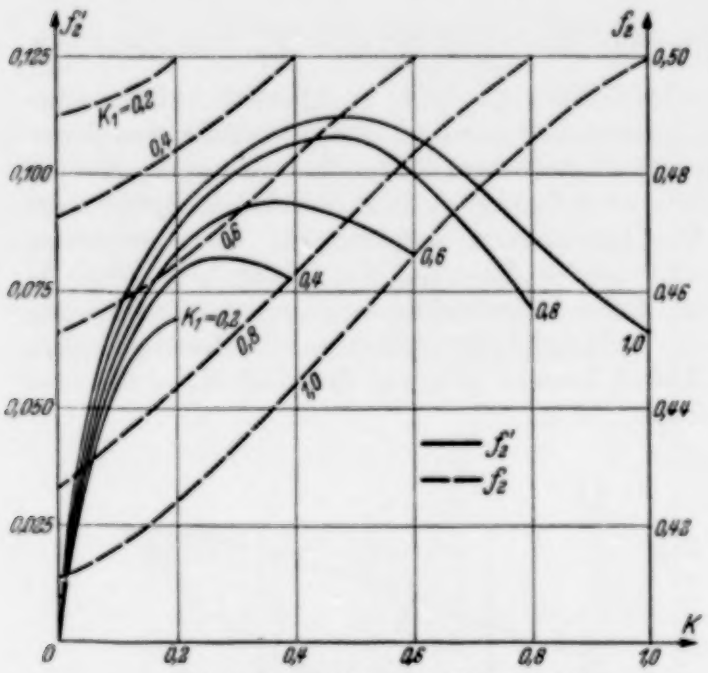


Abb. 5. f_2 und df_2/dK im Schlitzbereich.

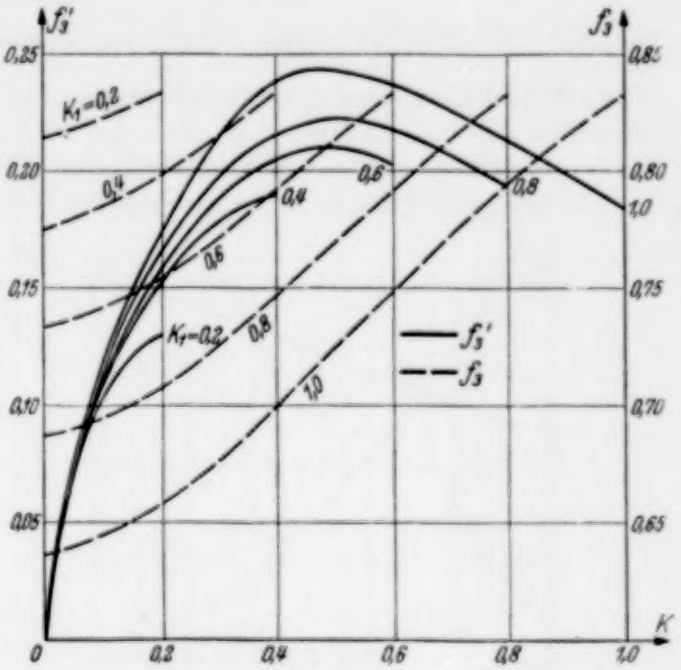


Abb. 6. f_3 und df_3/dK im Schlitzbereich.

Die Größen f_2, df_2/dK, f_3 und df_3/dK sind in Abhängigkeit der beiden Parameter K und K_1 graphisch bestimmt worden und in Abb. 5 und 6 aufgetragen. Für D und E erhält man

$$\left.\begin{aligned} D = D_{K=0} &+ 0{,}13587\,K^{3/2} + 4\left(\frac{K}{1+\sqrt{K}} - \frac{K\,K_1}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K}}\right) \\ &- \frac{2\pi}{3}\cos\sqrt{\frac{K}{K_1}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{K\,K_1^{3/2}}{K_1-K} + \frac{2\pi}{3}\,K\,K_1\,\frac{\pi/6\,\sqrt{K_1}\,e^{-3\sqrt{K/K_1}} + \sqrt{K}}{K + K_1\pi^2/36} \\ &+ \frac{2\pi}{3}\,K\,K_1\,\frac{\pi/6\,\sqrt{K}\,e^{-3\sqrt{K_1/K}} + \sqrt{K_1}}{K_1 + K\pi^2/36} - \frac{2\pi}{3}\,\frac{K\,\pi/6\,e^{-3\sqrt{K}} + \sqrt{K}}{K + \pi^2/36}\,, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$E = 1 - 0{,}47640\left(\sqrt{K_1} - \sqrt{K}\right). \tag{24}$$

Wir wollen als Beispiel den in Abb. 1b dargestellten Fall betrachten, bei dem im Ausgangszustand das *Blasius*profil ($K_1 = 1$ bzw. genauer $K_1 = 0{,}968$) vorhanden ist und dann ein Bereich homogener Absaugung beginnt. Wir wollen als Berechnungsbeispiel $Z_0/Z_\infty = 5$ annehmen, d. h. die Ausgangsgrenzschichtdicke betrage das Fünffache der asymptotisch bei unendlich langem Schlitz erreichten Grenzschichtdicke. Abb. 7 zeigt den errechneten Verlauf von Z/Z_∞. Diese Funktion sinkt vom Anfangswert 5 mit zunehmendem K schließlich für $K = K_1$ auf den Wert 3,39 ab. Damit ist aber noch nicht der Endzustand erreicht, da ja Z/Z_∞ asymptotisch gegen den Wert 1 gehen muß. Man muß also für den weiteren Verlauf der Grenzschichtentwicklung passende Annahmen machen. Dabei kann man insofern etwas großzügig vorgehen, als man eine genaue Darstellung der Strömungsvorgänge in unmittelbarer Umgebung des Schlitzes von einer Grenzschichttheorie ohnehin nicht erwarten kann, weil hier schon die Grundvoraussetzungen nur ungenügend erfüllt sind. Rechnerisch am einfachsten ist die Annahme, daß nach Erreichen von $K = K_1$ die Profilform unverändert bleibt und nur die Grenzschichtdicke ständig weiter ab-

[1] Siehe Fußnote 8 von S. 91.

nimmt. Wir denken uns also die Grenzschichtentwicklung im Schlitzbereich in zwei Schritte zerlegt. Der erste Schritt vollzieht sich nach Gl. (15), wobei K von 0 bis K_1 ansteigt. Beim zweiten Schritt spielt sich dann die Grenzschichtdicke bei festgehaltener Profilform ($K = K_1$) auf den geforderten Wert ein. Bei alleiniger Anwendung des Impulssatzes (11) ergibt sich dann mit K, f_2 und E konstant

$$\frac{1}{4}\frac{d\,(U^2/Z_\infty{}^2)}{d\xi} = \left(\frac{v_0}{U}\right)^2\left(1-\frac{Z}{Z_\infty}\right)$$

mit dem Integral

$$\xi - \xi_c = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\left(\frac{Z_C\,Z}{Z_\infty} + \ln\frac{Z_C - Z_\infty}{Z - Z_\infty}\right). \tag{25}$$

In Abb. 7 kommt der zweite Schritt nur als senkrechte Linie CA mit $K = K_1$ zum Ausdruck.

4. Periodische Absaugegrenzschichten. Bei sehr vielen, in gleichem Abstand aufeinanderfolgenden Absaugeschlitzen (vgl. Abb. 1c) wird sich nach einer gewissen Anlaufstrecke eine periodisch von Schlitz zu Schlitz wiederkehrende Geschwindigkeitsverteilung einstellen. Der Verlauf der Grenzschichtdicke δ (bzw. des Verhältnisses $\delta/\delta_\infty = Z/Z_\infty$) ist in Abb. 8 in Abhängigkeit vom Profilparameter aufgetragen, und zwar im schlitzfreien Bereich (Kurvenstück c) über K, im Bereich des Schlitzes dagegen über $K_1 - K$, so daß sich eine geschlossene Kurve ergibt. Abb. 8 bezieht sich auf den Fall $K_1 = 0{,}8$ und $Z_B/Z_\infty = 5$.

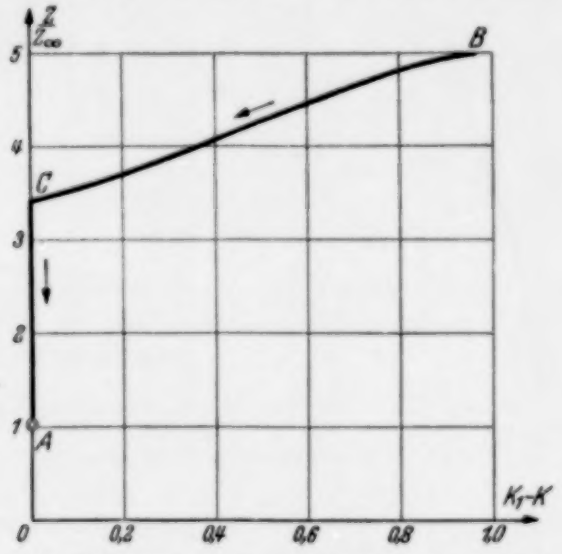


Abb. 7. Verlauf der Grenzschichtdicke für den Fall nach Abb. 1b.

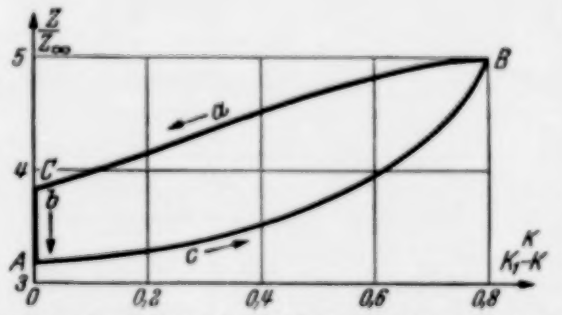


Abb. 8. Verlauf der Grenzschichtdicke für periodisch aufeinanderfolgende Absaugeschlitze (Fall nach Abb. 1c).

Es bereitet nach dem vorhergehenden keine Schwierigkeiten, die den drei Teilabschnitten a, b, c zugeordneten Längen x_a, x_b, x_c zu berechnen und damit auch den Schlitzabstand $a = x_a + x_b + x_c$ und die Schlitzbreite $s = x_a + x_c$ zu bestimmen, die einer geschlossenen Kurve im Diagramm nach Abb. 8 zugeordnet sind. Im vorliegenden Beispiel erhält man

$$\frac{U\,a}{\nu} = 4{,}88\left(\frac{U}{v_0}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{U\,s}{\nu} = 0{,}71\left(\frac{U}{v_0}\right)^2.$$

Damit beträgt in diesem Fall das Schlitzverhältnis $\lambda = s/a = 0{,}145$.

Es erweist sich als zweckmäßig, statt der Absaugegeschwindigkeit v_0 am Schlitz die mittlere Absaugegeschwindigkeit $v_1 = \lambda\, v_0$ einzuführen. Wir definieren ferner den „Absaugeparameter" Θ durch

$$\Theta = \frac{U\,a}{\nu}\left(\frac{v_1}{U}\right)^2 = \frac{\nu}{U\,a}\left(\frac{a}{\delta_{\infty 1}}\right)^2. \tag{26}$$

Für das Rechenbeispiel ergibt sich

$$\Theta = 4{,}88 \cdot 0{,}145^2 = 0{,}103\,.$$

Dabei ist $\delta_{\infty 1}$ die Grenzschichtdicke, die sich asymptotisch bei homogener Absaugung mit der mittleren Absaugegeschwindigkeit v_1 einstellen würde.

Durch Vorgabe von Θ und λ ist eine geschlossene Kurve im Diagramm nach Abb. 8 im allgemeinen bestimmt. Damit ist auch der Größtwert des Formparameters K gegeben, der im Punkt B erreicht wird. Dieser Wert $K_{max} = K_1$ ist aber entscheidend für die Stabilität des Geschwindigkeitsprofils. Es zeigt sich nun, daß das Schlitzverhältnis, solange es überhaupt klein ist, fast gar keinen Einfluß hat. In Abb. 9 ist für $K_1 = 0{,}8$ der Absaugeparameter Θ über dem Schlitz-

verhältnis λ aufgetragen. Für Werte $\lambda < 0{,}15$ ist Θ praktisch konstant. Diese Aussage bezieht sich natürlich nur auf die Grenzschichtströmung. Auf die Strömung im Schlitz selbst wird natürlich die Schlitzbreite einen wesentlichen Einfluß haben. Doch liegt dies außerhalb der vorliegenden Betrachtung. In Abb. 10 ist der sich aus der Rechnung ergebende Verlauf des Absaugeparameters Θ für kleine Schlitzverhältnisse λ in Abhängigkeit von K_1 aufgetragen. Nachdem dieser Zusammenhang hergestellt ist, besteht die nächste Aufgabe darin, die kritische *Reynolds*sche Zahl der Grenzschichtprofile zu berechnen. Erwartungsgemäß nimmt die kritische *Reynolds*sche Zahl mit zunehmendem Profilparameter K monoton ab, so daß also am Ende der schlitzfreien Strecke das instabilste Profil vorhanden ist. Es besteht also die Aufgabe, die Funktion $Re_{krit}\,(K_{max})$ zu bestimmen.

5. Die Stabilität der ebenen Laminarströmung. Mit Hilfe der von *Tollmien*[1] entwickelten Theorie der kleinen Schwingungen soll die Stabilität der Laminarströmung hinter einem Absaugeschlitz untersucht werden. Diese Methode ist schon mehrfach [2, 3] sehr eingehend behandelt worden, so daß es erlaubt ist, auf eine eingehende Darstellung und Begründung an dieser Stelle zu verzichten. Bemerkenswerterweise ist für die Stabilitätsuntersuchung nur die Form der örtlichen Geschwindigkeitsverteilung maßgebend, während der Einfluß der x-Abhängigkeit der

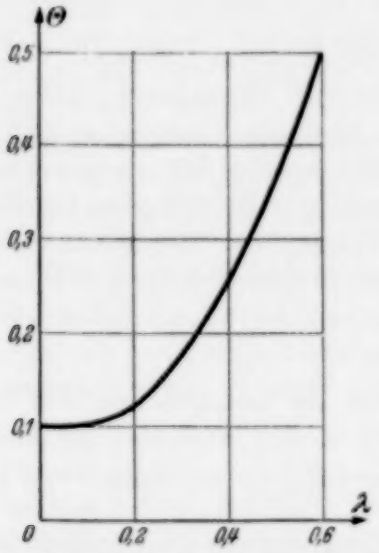


Abb. 9. Abhängigkeit des Absaugeparameters Θ vom Schlitzverhältnis (für $K_1 = 0{,}8$).

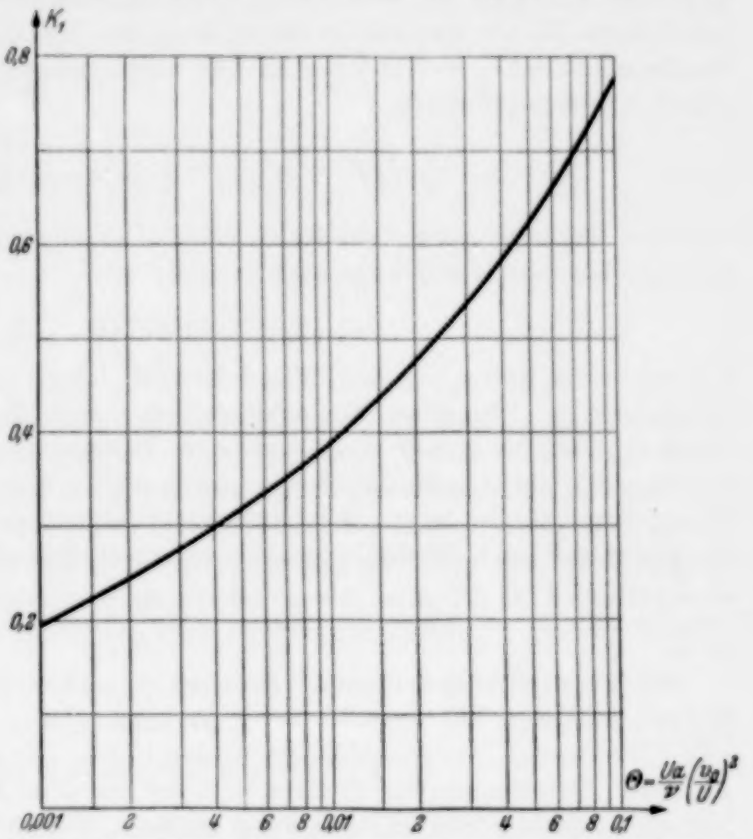


Abb. 10. Abhängigkeit des Absaugeparameters Θ vom Maximalwert K_1 des Profilparameters für kleine Schlitzverhältnisse ($\lambda < 0{,}15$).

Störungsamplitude vernachlässigbar gering ist und die x-Abhängigkeit der Grundströmung nur mittelbar über einen etwaigen Druckgradienten Einfluß gewinnt. In unserem Falle können allerdings in unmittelbarer Umgebung der Absaugeschlitze Schwierigkeiten auftreten, weil sich dort die laminare Grundströmung sehr rasch ändert. Jedoch können wir die unmittelbare Umgebung der Absaugeschlitze ausschließen, weil sich erwartungsgemäß die geringste Stabilität am Ende der schlitzfreien Strecke ergibt.

Wie die Versuche von *Schubauer* und *Skramstad*[4] gezeigt haben, ist Voraussetzung für die Gültigkeit der Stabilitätstheorie, daß die Anfangsstörungen sehr klein sind (Turbulenzgrad $< 0{,}2\%$). Bei vielen Versuchen mit hintereinander angeordneten Absaugeschlitzen ist diese Bedingung wahrscheinlich nicht erfüllt gewesen. Die Stabilitätstheorie ist bisher — von Sonderfällen abgesehen — nur auf Geschwindigkeitsverteilungen angewandt worden, die sich ganz oder stückweise durch Binome ausdrücken lassen. Die im folgenden mitgeteilten Formeln beziehen sich dagegen auf Geschwindigkeitsverteilungen, die durch beliebige Potenzreihen dargestellt werden können. Man hat dabei aber im allgemeinen die Schwierigkeit, daß diese Potenzreihen

[1] *W. Tollmien*. Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1929, S. 21.
[2] *C. C. Lin*. Quart. Appl. Math. 3 (1945), S. 117.
[3] *H. Holstein*. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 25.
[4] *G. B. Schubauer* and *H. K. Skramstad*, Journ. Aeron. Sci. 14 (1947), S. 69.

wegen des eigentümlichen asymptotischen Verhaltens der Grenzschichtgleichung im wandfernen Bereich immer schlechter konvergieren. Um praktischen Bedürfnissen zu dienen, wird im folgenden ein Weg gezeigt, bei dem es genügt, wenn die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe analytisch bekannt und durch eine Potenzreihe ausdrückbar ist, während im wandfernen Bereich die Geschwindigkeitsverteilung nur irgendwie graphisch oder numerisch vorgegeben sein muß, ohne durch eine analytische Beziehung ausdrückbar zu sein. Zur Darstellung dieser Ergänzungen der Stabilitätstheorie mögen im folgenden die wichtigsten Beziehungen der *Tollmien*schen Theorie in aller Kürze zusammengestellt werden.

Der laminaren Grundströmung $U(\eta)$ seien zweidimensionale Störungen überlagert, wobei die Stromfunktion einer Partialschwingung lautet:

$$\Psi(x, \eta, t) = \varphi(\eta)\, e^{-i\,\alpha\,(x - c\,t)}\,.$$

Hierbei ist $\eta = y/\delta$ und $\alpha = \alpha_0\,\delta$ (α_0 Kreisfrequenz der Störung) reell, während $c = c_r + i\,c_i$ im allgemeinen komplex ist, wobei c_r die Phasengeschwindigkeit der Störung und c_i ihre Anfachung bezeichnet. Da wir uns auf die Berechnung der Stabilitätsgrenze, also auf neutrale Schwingungen beschränken, ist $c_i = 0$ und $c = c_r$. Die Amplitude $\varphi(\eta)$ der Störung gehorcht dabei der *Tollmien*schen Störungsgleichung

$$\frac{u - c}{U}(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \frac{u''}{U}\varphi = -\frac{i}{\alpha\, Re}[\varphi^{IV} - 2\,\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi] \tag{27}$$

mit der *Reynolds*schen Zahl $Re = U\delta/\nu$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (27) kann in folgender Form angesetzt werden:

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4\,; \tag{28}$$

hierbei sind φ_1 und φ_2 mit dem Wandabstand „langsamveränderliche" Lösungen, φ_3 und φ_4 „schnell veränderliche" Lösungen. Dabei wächst aber nach *Tollmien* φ_4 über alle Grenzen, so daß man mit Rücksicht auf die Randbedingungen $c_4 = 0$ setzen muß. Die übrigen drei Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen $\varphi = \varphi' = 0$ an der Wand ($\eta = 0$) und $\varphi' = \alpha\varphi$ für großen Wandabstand. Die letzte Randbedingung folgt daraus, daß für großen Wandabstand u'' gegen Null geht und auch die Reibungswirkung vernachlässigbar wird, so daß dort nach (28)

$$\varphi'' = \alpha^2\varphi = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = e^{-\alpha\eta}$$

wird.

Die langsamveränderlichen Lösungen φ_1 und φ_2 entsprechen im wesentlichen den Lösungen der reibungslosen Störungsgleichung, die man erhält, wenn αRe so groß wird, daß die rechte Seite von Gleichung (27) vernachlässigt werden kann. Die reibungslose Differentialgleichung hat einen Pol erster Ordnung an der Stelle $u = c$, der wir den „kritischen" Punkt $\eta = \eta^*$ zuordnen. Physikalisch ist diese Stelle dadurch ausgezeichnet, daß die Flüssigkeit stets in der gleichen Störungsphase schwingt.

Wir führen als neue Veränderliche $\eta_1 = (\eta - \eta^*)/m$ ein, wobei m ein noch nicht näher bestimmter Maßstabsfaktor ist. Das laminare Grenzschichtprofil sei als Potenzreihe gegeben und in folgender Weise entwickelt:

$$\frac{u - c}{U} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{1}{i\,!}\,\eta_1{}^i\,. \tag{29}$$

Die Lösungen φ_1 und φ_2 sind dann gegeben durch

$$\varphi_1 = \eta_1 \sum_{0}^{\infty} a_n\,\eta_1^n\,. \tag{30}$$

$$\varphi_2 = \sum_{0}^{\infty} b_n\,\eta_1^n + \frac{\beta_2}{\beta_1}\varphi_1(\ln\eta_1 - i\,\pi)\,. \tag{31}$$

Das imaginäre Glied $i\,\pi$ ist nur für negative Werte von η_1 vorhanden, während es für positive η_1 verschwindet. Bei Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung vollzieht sich dieser Phasensprung beim Durchgang durch die „kritische" Schicht auf einer endlichen Wegstrecke. Ebenso verschwindet auch die logarithmische Singularität von φ_2' bei Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung. Die Koeffizienten a_n und b_n lauten für eine beliebige, entsprechend (29) als Reihenentwicklung gegebene Geschwindigkeitsverteilung:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{\beta_2}{2\beta_1}, \qquad a_2 = \frac{\beta_3}{6\beta_1} + \frac{\alpha_1^2}{6}, \qquad a_3 = \frac{1}{24}\frac{\beta_4}{\beta_1} + \frac{\alpha_1^2}{18}\frac{\beta_2}{\beta_1},\\
&a_4 = \frac{1}{120}\frac{\beta_5}{\beta_1} + \left[-\frac{1}{720}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 + \frac{1}{60}\frac{\beta_3}{\beta_1}\right]\alpha_1^2 + \frac{1}{120}\alpha_1^4,\\
&a_5 = \frac{1}{720}\frac{\beta_6}{\beta_1} + \left[\frac{1}{2400}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^3 - \frac{7}{5400}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{1}{240}\frac{\beta_4}{\beta_1}\right]\alpha_1^2 + \frac{23}{10800}\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1^4,\\
&a_6 = \frac{1}{5040}\frac{\beta_7}{\beta_1} + \left[-\frac{1}{7200}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^4 + \frac{11}{21600}\frac{\beta_2^2\beta_3}{\beta_1^3} - \frac{1}{3780}\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)^2 - \frac{1}{2520}\frac{\beta_2\beta_4}{\beta_1^2} + \frac{13}{15120}\frac{\beta_5}{\beta_1}\right]\alpha_1^2\\
&\qquad + \left[-\frac{37}{270}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 + \frac{\beta_3}{\beta_1}\right]\frac{1}{1680}\alpha_1^4 + \frac{1}{5040}\alpha_1^6,
\end{aligned}\right\} \tag{30a}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \left[-\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)\right] + \frac{\alpha_1^2}{2},\\
&b_3 = \left[-\frac{1}{8}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^3 - \frac{1}{6}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{1}{12}\frac{\beta_4}{\beta_1}\right] - \frac{1}{18}\frac{\beta_2}{\beta_1}\alpha_1^2,\\
&b_4 = \left[\frac{1}{48}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^4 - \frac{1}{12}\frac{\beta_2^2\beta_3}{\beta_1^3} + \frac{1}{36}\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)^2 - \frac{1}{24}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{1}{72}\frac{\beta_5}{\beta_1}\right] + \left[-\frac{61}{432}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)\right]\alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{24},\\
&b_5 = \left[-\frac{1}{192}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^5 + \frac{1}{48}\frac{\beta_2^3\beta_3}{\beta_1^4} - \frac{1}{72}\frac{\beta_2\beta_3^2}{\beta_1^3} - \frac{1}{48}\frac{\beta_2^2\beta_4}{\beta_1^3} + \frac{1}{96}\frac{\beta_3\beta_4}{\beta_1^2} - \frac{11}{1440}\frac{\beta_2\beta_5}{\beta_1^2} + \frac{1}{480}\frac{\beta_6}{\beta_1}\right]\\
&\qquad + \left[-\frac{109}{21600}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^3 - \frac{7}{225}\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1^2} + \frac{1}{60}\frac{\beta_4}{\beta_1}\right]\alpha_1^2 - \frac{1}{252}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\alpha_1^4.
\end{aligned}\right\} \tag{31a}
$$

Hierbei ist $\alpha_1 = \alpha m$. In den Reihenkoeffizienten (30a) und (31a) sind auch die von *Pretsch* für binomische Geschwindigkeitsverteilungen angegebenen Koeffizienten als Sonderfälle enthalten.

Die Reihenentwicklungen (30) und (31) sind nur im wandnahen Gebiet brauchbar. Wegen der dritten Randbedingung braucht man aber auch eine Darstellung der Lösungen φ_1 und φ_2 am Außenrand der Grenzschicht. Statt nun die Funktionen φ_1 und φ_2 nach der Koordinate η_1 zu entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten selbst wieder von $\alpha_1 = \alpha_0\,\delta m$ (α_0 Kreisfrequenz der Störung) abhängig sind, kann man die Funktionen auch nach α_1 entwickeln, wobei die Koeffizienten umgekehrt von η_1 abhängen[1]:

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_{10} + \alpha_1^2\varphi_{11} + \alpha_1^4\varphi_{12} + \alpha_1^6\varphi_{13} + \cdots,\\
&\varphi_2 + \varphi_{20} + \alpha_1^2\varphi_{21} + \alpha_1^4\varphi_{22} + \alpha_1^6\varphi_{23} + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{32}
$$

Die $\varphi_{\nu n}$ ($\nu = 1,2$) gewinnt man iterativ aus

$$
\frac{u-c}{U}\varphi_{\nu n}'' - \frac{u''}{U}\varphi_{\nu n} = \varphi_{\nu,n-1}\frac{u-c}{U}. \tag{33}
$$

Für $n = 0$ verschwindet die rechte Seite und man erhält als Anfangsglieder der Entwicklungen (32)

$$
\varphi_{10} = \frac{u-c}{U}\frac{1}{\beta_1}, \tag{34}
$$

$$
\varphi_{20} = -\beta_1\frac{u-c}{U}\int_{\bar\eta}^{\eta_1}\frac{d\eta_1}{(u-c)^2/U^2}. \tag{35}
$$

Die Konstante β_1 ergibt sich durch Vergleich mit den Reihenentwicklungen (30) und (31), in denen man $\alpha_1 = 0$ gesetzt hat. Die Integrationsgrenze $\bar\eta$ in (35) ist noch nicht näher bestimmt. Wir können uns aber in folgender Weise davon befreien: Wir berechnen φ_{20} aus der Reihenentwicklung (31) durch Nullsetzen von α_1 und zwar für einen Wert η_1, der noch im Konvergenzbereich der Reihenentwicklung (31) liegt. Aus rechnerischen Gründen ist es vielfach zweckmäßig, den Punkt $\eta_1 = 1$ zu wählen, so daß

$$
\varphi_{20}(1) = 1 + b_{20} + b_{30} + b_{40} + \cdots \tag{36}
$$

[1] Diese Möglichkeit ist bereits in der *Tollmien*schen Originalarbeit diskutiert worden, ohne daß aber ein rechentechnischer Nutzen daraus gezogen wurde.

wird. Andererseits ist dann aber

$$\varphi_{20}(1) = -\beta_1\left(\frac{u-c}{U}\right)_1 \int_{\eta}^{1} \frac{d\eta_1}{(u-c)^2/u^2},$$

so daß (35) umgeformt werden kann in

$$\varphi_{20} = \beta_1 \frac{u-c}{U}\left[\frac{\varphi_{20}{}^{(1)}}{\beta_1}\left(\frac{U}{u-c}\right)_1 - \int_{\eta}^{1} \frac{d\eta_1}{(u-c)^2/U^2}\right]. \tag{35a}$$

Für große Werte von η_1 verhalten sich φ_{10} und φ_{20} asymptotisch wie

$$\varphi_{10} \sim \frac{1-c/U}{\beta_1}, \tag{37}$$

$$\varphi_{20} \sim \frac{\beta_1}{1-c/U}(a-\eta_1). \tag{38}$$

Die Konstante a berechnet sich dabei zu

$$a = \varphi_{20}(1)\left(\frac{U}{u-c}\right)_1 \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1-c}{U}\right)^2 + 1 - \int_{1}^{\infty}\left[\left(\frac{U-c}{u-c}\right)^2 - 1\right] d\eta, \tag{39}$$

Das Integral kann graphisch ermittelt werden. Andererseits geht aber die reibungslose Störungsgleichung für großen Wandabstand über in $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$ mit den Lösungen $\varphi = \mathfrak{Cof}\,\alpha\eta$ bzw. $\mathfrak{Sin}\,\alpha_1\eta$ und durch Vergleich mit (37) und (38) erhält man schließlich als Lösungen für großen Wandabstand

$$\varphi_1 \sim \frac{1-c/U}{\beta_1}\mathfrak{Cof}\,\alpha_1\eta_1, \tag{40}$$

$$\varphi_2 \sim \frac{\beta_1}{1-x/U}\left[a\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1\eta_1 - \frac{1}{\alpha_1}\mathfrak{Sin}\,\alpha_1\eta_1\right]. \tag{41}$$

Für die spätere Rechnung ist folgende Beziehung wichtig, die jetzt leicht berechnet werden kann:

$$L(\alpha_1) = \frac{\varphi_2' + \alpha_1\varphi_2}{\varphi_1' + \alpha_1\varphi_1} \sim \left(\frac{\beta_1}{1-c/U}\right)^2\left(a - \frac{1}{\alpha_1}\right). \tag{42}$$

Bei den langsam veränderlichen Lösungen φ_1 und φ_2 hat die Reibung nur auf φ_2 einen Einfluß, und zwar nur in der Umgebung der „kritischen" Schicht, wo die Phasengeschwindigkeit der Störung mit der Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht übereinstimmt. Die schnell veränderliche Lösung φ_3 ist dagegen wesentlich reibungsbedingt und auf die Wandnähe beschränkt, während sie mit zunehmendem Abstand von der Wand schnell abklingt. Führt man die neue Veränderliche

$$\eta_2 = \frac{\eta - \eta^*}{\varepsilon} \tag{43}$$

ein mit

$$\varepsilon = \left[Re\left(\frac{du/U}{d\eta}\right)_{\eta=\eta^*}\alpha\right]^{-1/3},$$

wobei wieder

$$Re = \frac{U\delta}{\nu}, \qquad \frac{d(u/U)}{d\eta} = \frac{\beta_1}{m}, \qquad \alpha = \alpha_0\delta = \frac{\alpha_1}{m},$$

so erhält man aus der Störungsgleichung (32) unter Vernachlässigung der Glieder mit dem Faktor ε die Differentialgleichung

$$i\frac{d^4\varphi_3}{d\eta_2^4} + \eta_2\frac{d^2\varphi_3}{d\eta_2^2} = 0. \tag{44}$$

Die gesuchte Lösung φ_3 ist dabei diejenige schnell veränderliche Lösung dieser Differentialgleichung, die für großen Wandabstand verschwindet. Die Lösung φ_3 ist bemerkenswerterweise von der speziellen Form des Geschwindigkeitsprofils ganz unabhängig und kann daher universell berechnet werden. Die bereits genannten drei Randbedingungen führen auf folgende Determi-

nantenbedingung:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1w} & \varphi_{2w} & \varphi_{3w} \\ \varphi'_{1w} & \varphi'_{2w} & \frac{d\varphi_{3w}}{d\eta_2}\frac{d\eta_2}{d\eta_1} \\ (\varphi'_1+\alpha\varphi_1)_a & (\varphi'_2+\alpha_1\varphi_2)_a & 0 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{45}$$

Die Striche bezeichnen dabei Ableitungen nach η_1, der Index w die Wand und a den Außenrand der Grenzschicht. φ_3 ist am Außenrand der Grenzschicht schon abgeklungen. Die Auflösung der Determinante führt auf folgende Gleichung, wenn man noch $L(\alpha_1)$ aus (42) einführt:

$$\varphi_{3w}\Big/\frac{d\varphi_{3w}}{d\eta_2} = \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon}\,\frac{\varphi_{2w}-L\,\varphi_{1w}}{\varphi'_{2w}-L\,\varphi'_{1w}}\,. \tag{46}$$

Nun ist aber

$$\varphi_{3w}\Big/\frac{d\varphi_{3w}}{d\eta_2} = -\,D\,(\eta_{2w})\,,$$

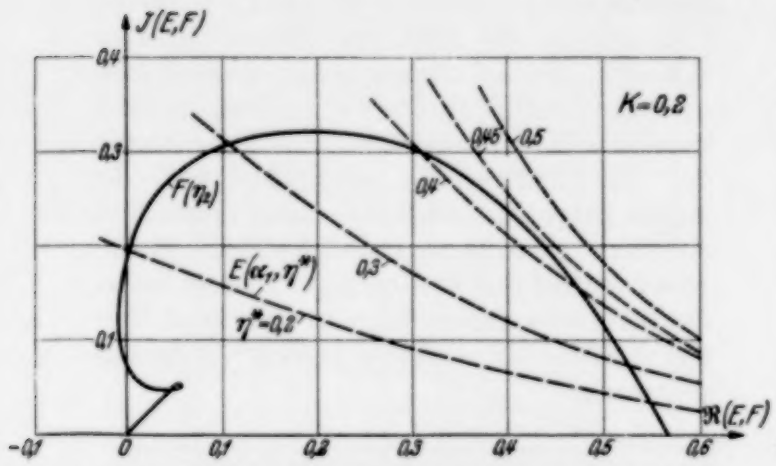


Abb. 11. Graphische Bestimmung der Lösungen von Gl. (54) für $K = 0{,}2$.

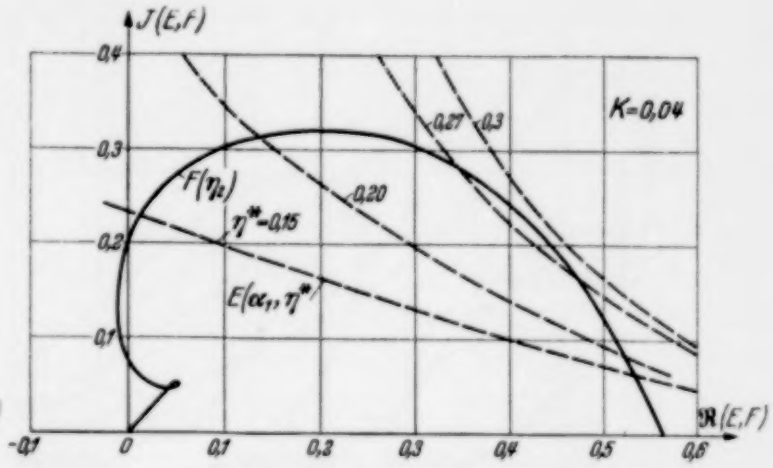


Abb. 12. Graphische Bestimmung der Lösungen von Gl. (54) für $K = 0{,}04$.

wo $D\eta_{2w}$) die in tabellierter Form vorliegende komplexe „*Tietjens*sche Funktion" ist. Dividiert man beide Seiten von Gleichung (46) noch durch $\eta_{2w} = -\eta^*/\varepsilon$, so erhält man schließlich mit den Abkürzungen

$$F(\eta_{2w}) = -\,D\,(\eta_{2w})/\eta_{2w}\,, \tag{47}$$

$$E(\alpha_1\,\eta^*) = -\frac{\sqrt{K}}{\eta^*}\,\frac{\varphi_{2w}-L\,\varphi_{1w}}{\varphi'_{2w}-L\,\varphi'_{1w}} \tag{48}$$

die Bedingungsgleichung

$$F(\eta_{2w}) = E\,(\alpha_1,\,\eta^*)\,. \tag{49}$$

Zur Ermittlung der Indifferenzkurve trägt man nun den imaginären Teil von F über dem Realteil auf (ausgezogene Kurve in Abb. 11 und 12). Hierzu zeichnet man zu gegebenem η^* und damit zu gegebenem c/U die Funktion $E(\alpha_1)$. Die Schnittpunkte beider Kurven erfüllen die Bedingung (49). Man findet demnach bei gegebenem η^* die zu den Durchgangspunkten gehörenden Werte α_1 und η_{2w}. Als Endergebnis sind schließlich die auf die Verdrängungsdicke δ_1 bezogenen Werte $\alpha^* = \alpha_0\,\delta_1$ in Abhängigkeit von der *Re*-Zahl $Re^* = U\delta_1/\varepsilon$ gesucht.

6. Anwendung auf Absaugegrenzschichten. Wir benützen die im vorhergehenden Abschnitt entwickelte Rechenmethode zur Berechnung der Stabilität der früher aufgestellten Grenzschichtprofile, die durch den Ansatz (18) bestimmt sind. Die kritische Stelle η^* ist daher implizit gegeben durch

$$\frac{c}{U} = 1 - e^{-\eta^*} - F(K,\,\eta^*)\,, \tag{50}$$

und die Koeffizienten β_i der Reihenentwicklung (34) lauten bei einem Maßstabfaktor $m = 1$

$$(-1)^i\,\beta_i = e^{-\eta^*} - K^{1-i/2}\,e^{-\eta^*\sqrt{K}} - K\begin{cases} \cos\frac{\pi}{6}\,\frac{\eta^*}{\sqrt{K}} & (i \text{ ungerade})\,, \\ \sin\frac{\pi}{6}\,\frac{\eta^*}{\sqrt{K}} & (i \text{ gerade})\,. \end{cases}$$

In Abb. 11 und 12 sind für die Werte $K = 0{,}2$ und $K = 0{,}04$ die komplexen Funktionen $F(\eta_{2w})$ und $E(\alpha_1, \eta^*)$ aufgetragen. Im einen Fall ist also $\eta_{2w} = -\eta^*/\varepsilon$, im anderen Fall ist auf jeder einzelnen Kurve α_1 der laufende Parameter. Die Schnittpunkte der F-Kurve mit der E-Kurvenschar liefern zusammengehörige Werte α_1, η_{2w}, η^*. Man bestimmt daraus

$$\alpha^* = \alpha_0 \delta_1 = \alpha_1 f_1(K), \tag{52}$$

$$R e^* = \frac{U \delta_1}{\nu} \left(- \frac{\eta_{2w}}{\eta^*} \right)^3 \frac{1}{\beta_1 \alpha_1} f_1(K). \tag{53}$$

Hierbei ist $f_1(K)$ aus Tabelle 1 zu entnehmen. Auf diese Weise sind die Kurven in Abb. 13 erhalten worden. Zusätzlich wurde noch die Kurve für das *Blasius*profil ($K = 0{,}968$) nach einer früheren Rechnung von *Tollmien*[1] und die davon etwas abweichende Kurve nach C. C. *Lin*[2] eingetragen. Ferner ist auch die Kurve für das asymptotische Absaugeprofil ($K = 0$) nach *J. Pretsch*[3] eingetragen worden. Das Ergebnis von *Pretsch* mit einer Stabilitätsgrenze von $Re = 5{,}52\ 10^4$ ist neuerdings angezweifelt worden[4]. Eine vom Verfasser durchgeführte Neuberechnung ergab innerhalb der Rechengenauigkeit (die etwa $\pm 5\%$ betragen dürfte) fast wieder die früheren Werte (genauer $5{,}8\ 10^4$). Es sei ferner noch darauf hingewiesen, daß C. C. *Lin*[5] eine etwas problematische Näherungsformel zur Berechnung der Stabilitätsgrenze angegeben hat, die wegen ihrer Einfachheit in amerikanischen Arbeiten gern benutzt wird. Bei der Anwendung auf das vorliegende Problem liefert die Näherungsformel folgende Werte im Vergleich zu der hier durchgeführten Stabilitätsrechnung:

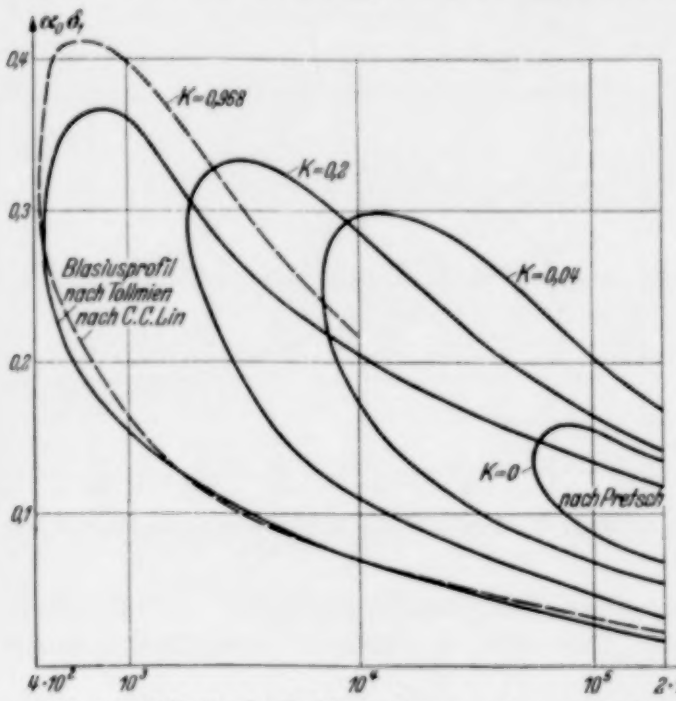


Abb. 13. *Tollmien*sches Stabilitätsdiagramm für verschiedene Werte von K.

	Stabilitätsrechnung	Näherungsformel nach *C. C. Lin*
$K = 0$	$5{,}52\ 10^4$ (*Pretsch*)	$3{,}9\ 10^4$
	$4{,}1\ 10^4$ (*Freeman*)	
$K = 0{,}04$	$0{,}68\ 10^4$	$1{,}72\ 10^4$
$K = 0{,}2$	$0{,}178\ 10^4$	$0{,}406\ 10^4$
$K = 0{,}968$	420 (*Tollmien*)	450

Nach der *Lin*schen Formel geht also der Abfall der kritischen *Reynolds*schen Zahl mit wachsendem Parameter K viel langsamer vor sich als nach der hier durchgeführten Stabilitätsrechnung. Wir werden aber für die folgenden Betrachtungen die Ergebnisse der Stabilitätsrechnung zugrunde legen. Die Auftragung der obigen Werte im Diagramm (Abb. 14) läßt den raschen Abfall der kritischen *Reynolds*schen Zahl mit wachsendem Parameter K erkennen. Dies liegt offenbar daran, daß für die Stabilität der wandnahe Verlauf des Grenzschichtprofils maßgebend ist. Dieser Bereich wird aber nach dem Ende des Absaugeschlitzes sehr rasch wieder umgeformt.

Verbinden wir die in Abb. 10 dargestellte Abhängigkeit des Absaugeparameters

$$\Theta = \frac{U a}{\nu} \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 = \frac{\nu}{U \delta_1} \left(\frac{a}{\delta_\infty} \frac{\delta_1}{\delta_\infty} \right)$$

von $K_{max} = K_1$ mit der in Abb. 14 dargestellten Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von K, so gewinnen wir daraus die in Abb. 15 dargestellte Abhängigkeit der kritischen Re-Zahl, $Re = U\delta_1/\nu$ von $(\delta_\infty/a)\,(\delta_\infty/\delta_1)$. Dabei ist δ_∞/δ_1 nicht wesentlich von 1 verschieden. Gleichzeitig ist in diesem Kurvenblatt auch der Mengenbeiwert $c_Q = -v_1/U$ aufgetragen. Bei der Berechnung des Mengenbeiwertes wurde näherungsweise $\delta_\infty/\delta_1 = 1$ gesetzt.

---

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 97.
[2] Siehe Fußnote 2 von S. 97.
[3] Siehe Fußnote 6 von S. 90.
[4] *P. Chiarulli* and *J. C. Freeman*. Stability of the Boundary Layer. Hdqtrs Air Nat. Comm, Dayton. Techn. Rep. No. F-TR 1197-1A Aug. 1948. S. 1—104.
[5] Siehe Fußnote 2 von S. 97.

Wenn man bedenkt, daß beispielsweise bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 100 m/s die zulässige Grenzschichtdicke etwa von der Größenordnung 1/10 mm ist, erkennt man, daß nur verhältnismäßig kleine Werte des Verhältnisses technische Bedeutung haben. Aus Abb. 15 erkennt man dann aber, daß eine wesentliche Erhöhung der kritischen *Reynolds*schen Zahl nicht zu erreichen ist.

Man muß also aus den vorstehenden Überlegungen die Schlußfolgerung ziehen, daß es durch Anwendung aufeinanderfolgender Absaugeschlitze nicht möglich ist, die kritische *Reynolds*sche wesentlich zu steigern. Für verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten mit großer Grenzschichtdicke wird man dagegen eher große Werte von δ_∞/a erreichen können und daher auch die kritische *Re*-Zahl auf den mehrfachen Betrag steigern können.

Die vorstehenden Überlegungen sind in mehrfacher Hinsicht unvollkommen. Die Grenzschicht-

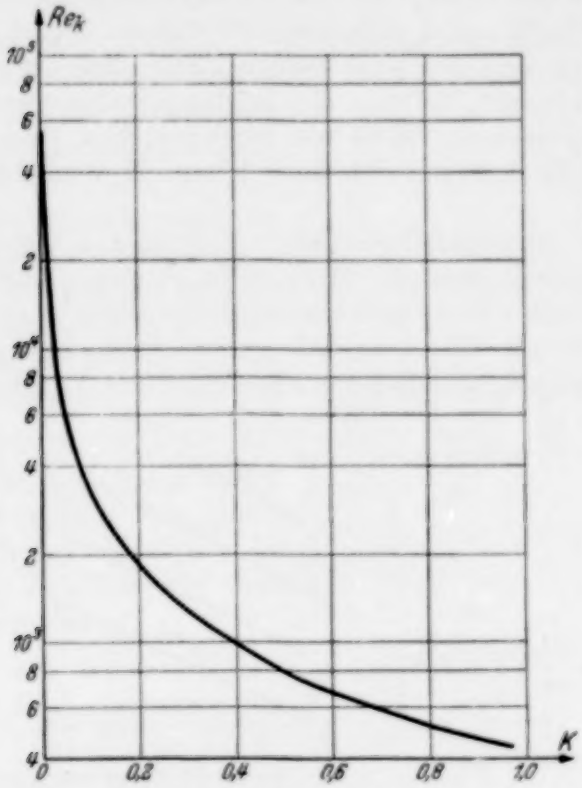


Abb. 14. Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze vom Profilparameter *K*.

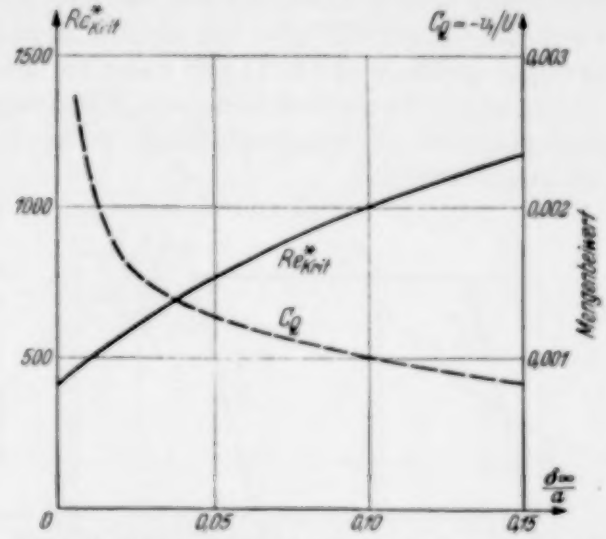


Abb. 15. Abhängigkeit der kritischen *Reynolds*schen Zahl (Stabilitätsgrenze) von dem Verhältnis von mittlerer Grenzschichtdicke zum Schlitzabstand. Die gestrichelte Kurve gibt den Mengenbeiwert $c_Q = v_1/U$ an.

profile sind nicht exakt berechnet, sondern mehr oder weniger willkürlich als einparametrige Kurvenscharen angenommen. Das periodische Senkenfeld der Absaugeschlitze ist nicht berücksichtigt worden. Verfasser beabsichtigt, in einer weiteren Mitteilung eine genauere Theorie der periodischen Absaugegrenzschichten zu geben und damit die genannten Mängel zu beseitigen. Aber auch bezüglich der Anwendung der *Tollmien*schen Stabilitätstheorie auf periodische Absaugegrenzschichten können Einwände erhoben werden. Man kann sich beispielsweise vorstellen, daß Störschwingungen auf einem Teil der Wegstrecke angefacht werden, auf einem weiteren Teil dagegen gedämpft, ohne daß im ganzen gesehen ein Umschlag zur Turbulenz erfolgt. Die Stabilitätsgrenze dürfte also bei periodischen Absaugegrenzschichten höher liegen, als sich durch formale Anwendung der *Tollmien*schen Theorie ergibt. Um einen tieferen Einblick zu gewinnen, wird es notwendig sein, die *Tollmien*sche Theorie für dieses spezielle Problem in der angedeuteten Richtung zu erweitern.

(Eingegangen am 9. August 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Wuest*, Göttingen, Bättingerstraße 6/8.

Strukturmodelle und Systematik der Fließvorgänge.

Von E. Mewes.

1. Einleitung. Unter Last zeigen die verschiedenen Stoffe die verschiedenartigsten Fließvorgänge. Viele Arbeiten aus der Rheologie (= Fließkunde) befassen sich damit, wobei aber noch vielfach eine Kluft zwischen der theoretischen und der praktischen Erforschung festzustellen ist. Versuche, systematische Angaben zu machen [1], sollten die beiden Zweige einander näher bringen. Die Methode, die Fließgesetzmäßigkeiten an Hand von mechanischen Modellen zu erklären, wird nicht alle Erscheinungen erfassen, doch lassen sich danach verschiedene Eigenschaften einordnen.

Besonders übersichtlich ist der Aufbau, solange nur parallel gerichtete Federn und Dämpfer mit linearen Gesetzmäßigkeiten als Elemente angesetzt werden. Mit der Belastung τ und der Verformungsgröße γ (Abb. 1) gilt dann für Feder allein $\tau = c\gamma$ und für Dämpfer allein $\tau = \mu D\gamma$. Ein D vor einer Variablen bedeutet Ableitung nach der Zeit t, so daß $D\gamma$ die Verformungsgeschwindigkeit ist. Trägheitseinflüsse zu berücksichtigen, war bei den rheologischen Vorgängen i. a. nicht erforderlich.

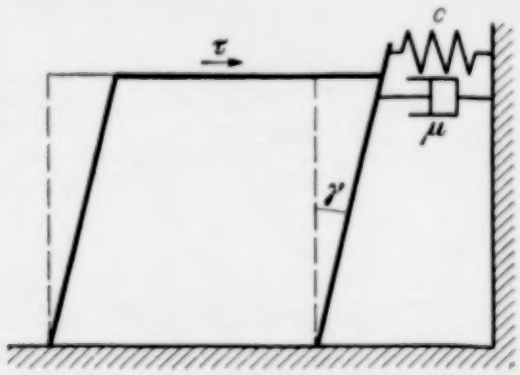


Abb. 1. Mit der Zeit sich verformender Block und seine Beanspruchung.

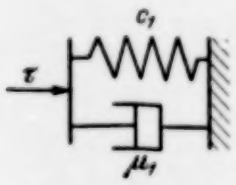


Abb. 2. Einfaches Strukturmodell nach *Kelvin-Voigt*.

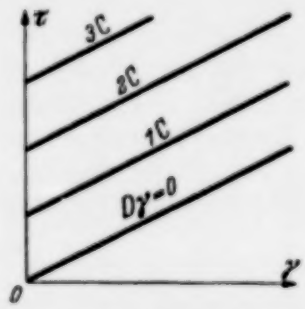


Abb. 2a. Zusammenhang zwischen Beanspruchung, Verformung und Verformungsgeschwindigkeit für nebenstehendes Modell.

2. Parallelschaltung von Feder und Dämpfer. Die Elemente können nun verschieden zueinander geschaltet sein. Bei Parallelschaltung nach Abb. 2 — die parallelen Begrenzungsstriche mögen kennzeichnen, daß die dazwischen liegenden Elemente, Feder und Dämpfer, gleich große Verformungen aufweisen sollen — tritt für eine zur Zeit $t = 0$ plötzlich einsetzende gleichbleibende Belastung τ_1 ein Verformungsverlauf nach der Gesetzmäßigkeit

$$\gamma = \gamma_1 (1 - e^{-t/T_1}) \tag{1}$$

mit

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{c_1} \tag{2}$$

und

$$T_1 = \frac{\mu_1}{c_1} \tag{3}$$

auf.

Je nach den Größen für die Steifigkeit c_1 und die Viskosität μ_1 kann auch die Einschwingzeit T_1 ganz verschiedene Größenordnungen aufweisen. Ist $c_1 \gg \mu_1$, so ist die Einschwingzeit sehr kurz, z. B. $^1/_{100}$ sec. Dann ist schon nach 1 sec nichts von Verformungsänderungen mehr zu spüren. Ist $\mu_1 \gg c_1$, dann ist die Einschwingzeit sehr lang, z. B. 100 Std. Dann ist erst bei einer längeren Versuchsdauer das Vorhandensein von Verformungsänderungen festzustellen. Sowohl für $c_1 \to \infty$ als auch für $\mu_1 \to \infty$ würden Verformungen an diesem Elementenpaar verschwindend werden. Für $c_1 = 0$ entartet der Verlauf in

$$\gamma = \frac{\tau_1}{\mu_1} t, \tag{4}$$

[1] Z. B. Systematik der elastischen und plastischen Deformationen nach Aufstellung des British Rheologists' Club, siehe Nature 149 (1942) S. 702, auch Z. Kunststoffe 34 (1944) S. 26.

für $\mu_1 = 0$ in

$$\gamma = \frac{\tau_1}{c_1}. \tag{5}$$

Wird ein System nach Abb. 2, das zunächst eine Verformung γ_1 gegenüber dem unbelasteten Zustand aufweisen möge, von $t = 0$ an sich selbst überlassen (also ohne äußere Belastung), dann tritt ein Verformungsverlauf auf nach der Beziehung

$$\gamma = \gamma_1 e^{-t/T_1}. \tag{6}$$

Es ist dann, ohne daß eine Belastung vorhanden ist, solange nicht $t \gg T_1$ ist, für einige Zeit eine zeitlich sich ändernde Verformung festzustellen. Das Modell steht also unter der Nachwirkung der vorher aufgetretenen Belastungen. Das zeigt auch die folgende Betrachtung: Für beliebigen Verformungsverlauf $\gamma(t)$ kann der Belastungsverlauf für dieses Modell errechnet werden aus

$$\tau = c_1 \gamma + \mu_1 D\gamma. \tag{7}$$

Diese Gleichung weist auch darauf hin, daß für dieses Modell der in Abb. 2a skizzierte Zusammenhang

$$\tau = f(\gamma, D\gamma)$$

gilt. Demgegenüber gilt bei beliebigem Belastungsverlauf an diesem Modell für den Verformungsverlauf die aus obiger Differentialgleichung ableitbare Integrallösung

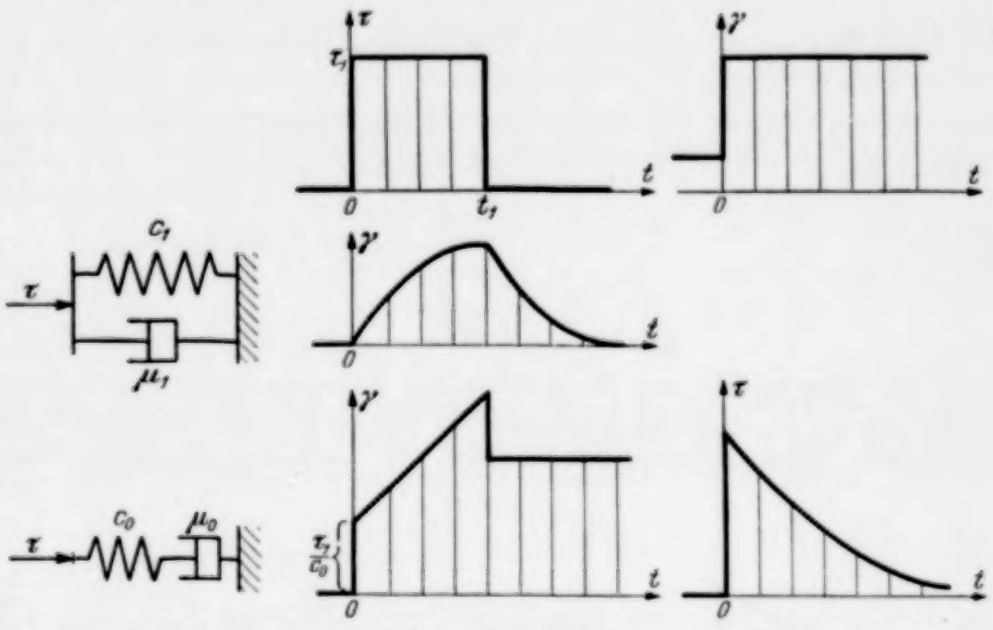


Abb. 3. Verläufe für zwei Modelle bei einfach vorgegebenem Belastungs- bzw. Verformungsverlauf.

$$\gamma = \frac{1}{\mu_1} e^{-t/T_1} \int_{t_0}^{t} \tau\, e^{t/T_1}\, dt. \tag{8}$$

Das Integral, das sich von einem vorangegangenen Zeitpunkt vollständiger Entlastung t_0 bis t erstreckt, zeigt an, daß für den Verformungsverlauf die Belastungen der vor dem Zeitpunkt t liegenden Zeit maßgebend sind. Wir haben also mit einem Nachwirken der Belastung zu tun. Für verschiedene analytische Gesetzmäßigkeiten $\tau(t)$ kann nach (8) $\gamma(t)$ ermittelt werden. Je nach Einsatz der Belastungsgesetzmäßigkeit ist dabei z. B. $t_0 \to -\infty$ oder $t_0 = 0$ anzusetzen.

3. Vergleich von Parallelschaltung und Hintereinanderschaltung. In Abb. 3 ist für eine genügende Zeitlang gleichbleibende und dann aufhörende Belastung zunächst für das Modell mit parallel geschaltetem Feder und Dämpfer der Verformungsverlauf aufgezeichnet, darunter dasselbe für ein Modell mit hintereinander geschalteten Elementen. Für dieses zweite gilt während der Belastungszeit

$$\gamma = \tau_1 \left(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{\mu_0} t \right). \tag{9}$$

Nach der Belastung ist eine bleibende Verformung festzustellen von der Größe

$$\gamma = \frac{\tau_1 t_1}{\mu_0} \tag{10}$$

mit t_1 als Belastungsdauer. Als Differentialgleichung gilt für dieses Modell allgemein

$$D\gamma = \frac{D\tau}{c_0} + \frac{\tau}{\mu_0}. \tag{11}$$

Danach kann für beliebigen Belastungsverlauf der Verformungsverlauf ermittelt werden. Für gegebenen Verformungsverlauf erhält man dagegen den Belastungsverlauf aus der aus obiger

Differentialgleichung abgeleiteten Integralbeziehung

$$\tau = c_0 e^{-\frac{c_0}{\mu_0} t} \int D\gamma \, e^{\frac{c_0}{\mu_0} t} \, dt . \tag{12}$$

Insbesondere ist für $D\gamma = \text{konst.}$ infolge

$$\int e^{\frac{c_0}{\mu_0} t} \, dt = \frac{\mu_0}{c_0} e^{\frac{c_0}{\mu_0} t} + C$$

$$\tau = \mu_0 D\gamma + C c_0 e^{-\frac{c_0}{\mu_0} t} . \tag{13}$$

Für $t = 0$ ist $\tau_0 = \mu_0 D\gamma + C c_0$, also

$$\tau = \mu_0 D\gamma + (\tau_0 - \mu_0 D\gamma) e^{-\frac{c_0}{\mu_0} t} . \tag{14}$$

Ist für $t > 0$, $\gamma = \text{konst.}$, so ist

$$\tau = \tau_0 e^{-t/T_0} \tag{15}$$

mit

$$T_0 = \frac{\mu_0}{c_0} \tag{16}$$

(Abb. 3). Man spricht von Nachlassen der Spannung oder von Relaxation nach *Maxwell*. Die Zeitkonstante T_0 heißt Relaxationszeit. Sie ist ähnlich aufgebaut wie die damit nicht zu verwechselnde Einschwingzeit des Modells mit parallelgeschalteten Feder und Dämpfer. Nach-

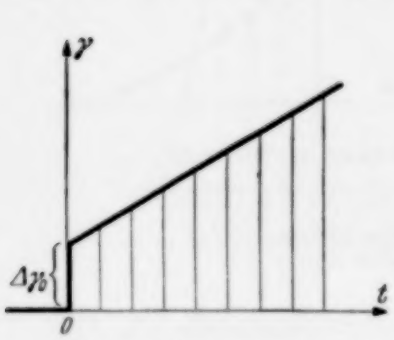


Abb. 4. Vorgegebener Verformungsverlauf.

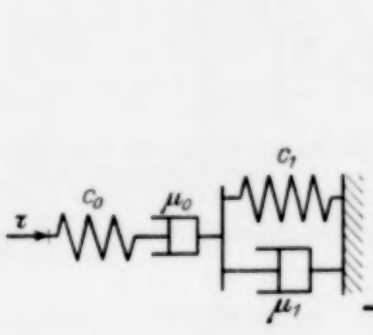


Abb. 5. Zusammengesetztes Strukturmodell.

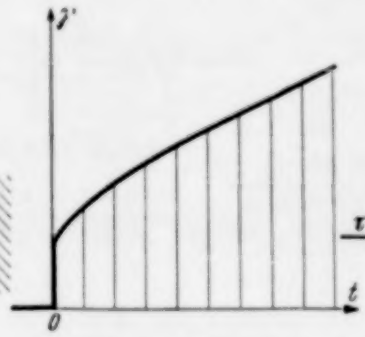


Abb. 5a. Verformungsverlauf nebenstehender Systeme bei plötzlich einsetzender, gleichbleibender Belastung.

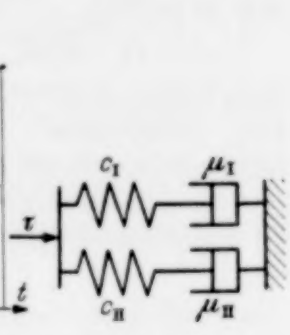


Abb. 5b. System aus zwei parallelgeschalteten *Maxwell*-Gliedern.

wirken und Nachlassen treten bei diesen einfachen Modellen jeweils bei verschiedenartigen Systemen auf (Abb. 3). Für das Modell mit hintereinander geschalteten Elementen ist Nachlassen bei $D\gamma = \text{konst.}$ nach (14) nur festzustellen, wenn

$$\tau_0 > \mu_0 D\gamma \tag{17}$$

mit

$$\tau_0 = c_0 \Delta\gamma_0 \tag{18}$$

im gegebenen Verformungsverlauf nach Abb. 4 ist.

4. Zusammengesetzte Modelle. Für das zusammengesetzte Modell nach Abb. 5 ist

$$\gamma = \frac{\tau}{c_0} + \frac{\int \tau \, dt}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} e^{-t/T_1} \int \tau \, e^{t/T_1} \, dt . \tag{19}$$

Daraus läßt sich ableiten

$$D^2\gamma + \frac{1}{T_1} D\gamma = \frac{1}{c_0}\left[D^2\tau + \left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_1} + \frac{c_0}{c_1}\frac{1}{T_1}\right) D\tau + \frac{1}{T_0}\frac{1}{T_1}\tau\right] . \tag{20}$$

Für $\tau = \text{konst.}$ wird

$$D^2\gamma + \frac{1}{T_1} D\gamma = \frac{1}{T_1}\frac{\tau}{\mu_0} , \tag{21}$$

woraus

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\tau}{\mu_0} t + T_1 \left(D\gamma_0 - \frac{\tau}{\mu_0} \right) (1 - e^{-t/T_1}) \tag{22}$$

erhalten wird. Für ein vorher in Ruhe befindliches System ist

$$\gamma_0 = \frac{\tau}{c_0}, \qquad D\gamma_0 = \tau \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} \right),$$

so daß

$$\gamma = \tau \left[\frac{1}{c_0} + \frac{1}{\mu_0} t + \frac{1}{c_1} (1 - e^{-t/T_1}) \right] \tag{23}$$

erhalten wird, was in Abb. 5a dargestellt ist. Das Glied mit e^{-t/T_1} weist auf das Auftreten von elastischer Nachwirkung hin. Über die Relaxation bei diesem Modell wird später gesprochen.

Als nächstes Modell wird ein aus zwei parallelgeschalteten *Maxwell*-Systemen aufgebautes System besprochen [1] (Abb. 5b). Es ist γ_I die Durchfederung der einen Feder. Die Verformung des zugehörigen Dämpfers ist dann $\gamma - \gamma_I$. Jetzt ist

$$c_I \gamma_I = \mu_I (D\gamma - D\gamma_I). \tag{24}$$

Für das Gesamtmodell gilt

$$\tau = c_I e^{-t/T_I} \int D\gamma\, e^{t/T_I}\, dt + c_{II} e^{-t/T_{II}} \int D\gamma\, e^{t/T_{II}}\, dt. \tag{25}$$

Für die Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung wird nun die *Heaviside*sche Operatorenmethode benutzt. Der Operator D wird wie ein algebraischer Einzelausdruck behandelt. In den Zwischenrechnungen wird D getrennt von den Veränderlichen geschrieben. Aus (24) wird erhalten

$$\gamma_I (c_I + \mu_I D) = \mu_I D\gamma, \tag{26}$$

$$c_I \gamma_I = \frac{c_I \mu_I D\gamma}{c_I + \mu_I D} = \frac{\mu_I}{1 + T_I D} D\gamma. \tag{27}$$

Die Gesamtbelastung vom System (Abb. 5b) ist

$$\tau = c_I \gamma_I + c_{II} \gamma_{II}, \tag{28}$$

$$\tau = D\gamma \left(\frac{\mu_I}{1 + T_I D} + \frac{\mu_{II}}{1 + T_{II} D} \right), \tag{29}$$

$$(1 + T_I D)(1 + T_{II} D)\tau = [\mu_I (1 + T_{II} D) + \mu_{II} (1 + T_I D)] D\gamma, \tag{30}$$

$$\tau + (T_I + T_{II}) D\tau + T_I T_{II} D^2 \tau = (\mu_I + \mu_{II}) D\gamma + (\mu_I T_{II} + \mu_{II} T_I) D^2 \gamma. \tag{31}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (20):

$$a_1 D\gamma + a_2 D^2 \gamma = \tau + b_1 D\tau + b_2 D^2 \tau \tag{32}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \mu_I + \mu_{II} && = \mu_0, \\ a_2 &= \mu_I T_{II} + \mu_{II} T_I && = \mu_0 T_1, \\ b_1 &= T_I + T_{II} && = T_0 + T_1 + \frac{\mu_0}{c_1}, \\ b_2 &= T_I T_{II} && = T_0 T_1. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die beiden Modelle sind also dynamisch nicht verschiedenartig. Für dynamische Gleichwertigkeit gilt

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= c_I + c_{II}, & \mu_0 &= \mu_I + \mu_{II}, \\ c_1 &= \frac{c_I c_{II} (c_I + c_{II}) (\mu_I + \mu_{II})^2}{(c_I \mu_{II} - \mu_I c_{II})^2}, & \mu_1 &= \frac{\mu_I \mu_{II} (\mu_I + \mu_{II}) (c_I + c_{II})^2}{(\mu_I c_{II} - c_I \mu_{II})^2}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

[1] Siehe *Holzmüller* und *Jenckel*, Z. phys. Chem. 1940, Abt. A, S. 359. Dort ist allerdings $c_I = c_{II}$ angesetzt.

Man kann auch verwenden

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{a_1}{b_0}, & c_0 &= \frac{a_2}{b_2}, \\ T_0 &= \frac{a_1 b_2}{a_2 b_0}, & T_1 &= \frac{a_2}{a_1}, \\ c_1 &= \frac{a_1^2 a_2}{a_1 a_2 b_1 - a_1^2 b_2 - a_2^2 b_0}, & \mu_1 &= \frac{a_1 a_2^2}{a_1 a_2 b_1 - a_1^2 b_2 - a_2^2 b_0} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} T_{\substack{\mathrm{I}\\\mathrm{II}}} &= \frac{b_1}{2 b_0} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4 b_0^2} - \frac{b_2}{b_0}}, \\ \mu_{\substack{\mathrm{I}\\\mathrm{II}}} &= \frac{a_1}{2 b_0} \pm \frac{\frac{a_1 b_1}{2 b_0} - a_2}{\sqrt{b_1^2 - 4 b_2 b_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Für γ = konst. wird

$$D^2 \tau + \left(\frac{1}{T_\mathrm{I}} + \frac{1}{T_\mathrm{II}}\right) D\tau + \frac{1}{T_\mathrm{I}} \frac{1}{T_\mathrm{II}} \tau = 0, \tag{37}$$

$$\tau = C_\mathrm{I}\, e^{-t/T_\mathrm{I}} + C_\mathrm{II}\, e^{-t/T_\mathrm{II}}. \tag{38}$$

Da für $t \to \infty$ offenbar $\tau \to 0$ geht, steckt hierin Relaxation. Relaxation ist also auch bei Modell nach Abb. 5 festzustellen, wie Nachwirken bei diesem Modell.

5. Allgemeine Modelle. Das allgemeinste Modell aus parallelgeschalteten *Maxwell*-Systemen ist in Abb. 6 angedeutet. Hierfür gilt

$$\tau = \sum_{j=1}^{N} c_j\, e^{-t/T_j} \int D\gamma\, e^{t/T_j}\, dt \tag{39}$$

oder

$$a_1 D\gamma + a_2 D^2\gamma + \cdots + a_N D^N\gamma = \tau + b_1 D\tau + b_2 D^2\tau + \cdots + b_N D^N\tau \tag{40}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sum \mu, \quad & a_2 &= \mu_\mathrm{I}(T_\mathrm{II} + T_\mathrm{III} + \cdots) + \mu_\mathrm{II}(T_\mathrm{I} + T_\mathrm{III} + \cdots) + \cdots \\ & & a_3 &= \mu_\mathrm{I}(T_\mathrm{II}\, T_\mathrm{III} + \cdots) + \mu_\mathrm{II}(T_\mathrm{I}\, T_\mathrm{III} + \cdots) + \cdots, \ \cdots, \\ b_1 &= \sum T, \quad & b_2 &= T_\mathrm{I}\, T_\mathrm{II} + T_\mathrm{I}\, T_\mathrm{III} + \cdots, \\ & & b_3 &= T_\mathrm{I}\, T_\mathrm{II}\, T_\mathrm{III} + \cdots, \ \cdots, \quad b_N = \Pi\, T. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Eine andere Form des allgemeinsten Modells aus parallelgerichteten Federn und Dämpfern ist in Abb. 6a angedeutet. Hierfür gilt

$$\gamma = \frac{\tau}{c_0} + \frac{\int \tau\, dt}{\mu_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}\, e^{-\frac{c_i}{\mu_i} t} \int \tau\, e^{\frac{c_i}{\mu_i} t}\, dt \tag{42}$$

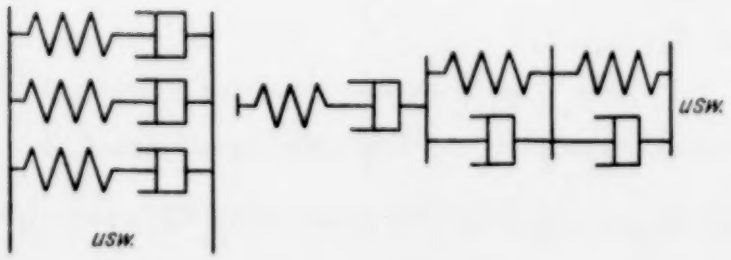


Abb. 6. Abb. 6a.

Abb. 6 u. 6a. Allgemeinstes Modell.

oder mit

$$\int \tau\, dt = D^{-1}\tau \tag{43}$$

und

$$c_i \gamma_i + \mu_i D\gamma_i = \tau, \tag{44}$$

$$\gamma = \tau\left(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{\mu_0 D} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i + \mu_i D}\right). \tag{45}$$

Hieraus ergibt sich mit

$$N = n + 1 \tag{46}$$

die Differentialgleichung (40) mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \mu_0, \quad a_2 = \mu_0(T_1 + T_2 + T_3 + \cdots), \quad a_3 = \mu_0(T_1\, T_2 + T_1\, T_3 + \cdots), \ \cdots, \\ b_1 &= T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + \mu_0\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots\right), \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= T_0(T_1+T_2+T_3+\cdots)+T_1T_2+T_1T_3+\cdots \\ &\quad +\mu_0\left[\frac{1}{c_1}(T_2+T_3+\cdots)+\frac{1}{c_2}(T_1+T_3+\cdots)+\frac{1}{c_3}(T_1+T_2+\cdots)+\cdots\right], \\ b_3 &= T_0(T_1T_2+T_1T_3+\cdots)+T_1T_2T_3+\cdots \\ &\quad +\mu_0\left[\frac{1}{c_1}(T_2T_3+\cdots)+\frac{1}{c_2}(T_1T_3+\cdots)+\frac{1}{c_3}(T_1T_2+\cdots)+\cdots\right], \quad \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Diese Differentialgleichung (40) ist gültig für beliebig vorgegebenen Belastungsverlauf oder Verformungsverlauf. Die Gültigkeit für beide Modelle nach Abb. 6 und 6a kennzeichnet, daß die Systeme dynamisch gleichwertig sind [1], wenn bei dem System von Abb. 6 ebenso viele Federn und Dämpfer verwendet werden wie bei dem System von Abb. 6a und die aus den verschiedenen Formen für die Beiwerte a und b sich ergebenden Beziehungen zwischen den Größen c und μ beachtet werden.

6. Verwickeltere Modelle. Es sind nun auch kompliziert erscheinende Aufbauten von Modellen bestehend aus parallel gerichteten Federn und Dämpfern, die in verwickelter Weise zueinander geschaltet wurden, angegeben worden, um zu zeigen, daß es auch kompliziertere Fälle von Strukturschaltungen gibt [2]. Es läßt sich nun aber zeigen, daß auch für solche Strukturmodelle sich gleichartige Differentialgleichungen (40) ergeben. Dies wird für das in Abb. 7 dargestellte Modell nachgewiesen. Dafür ist, wenn die Verformung der Feder 1 mit γ_1, der Feder 2 mit γ_2, der Federn 1 und 3 zusammen mit γ_3 und die Gesamtverformung des Modelles wie sonst mit γ bezeichnet werden:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \mu_3(D\gamma - D\gamma_3), \\ \tau &= c_3(\gamma_3-\gamma_1)+\mu_2(D\gamma_3 - D\gamma_2), \\ \tau &= c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2, \\ c_1\gamma_1 &= c_3(\gamma_3-\gamma_1)+\mu_1(D\gamma_2 - D\gamma_1). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

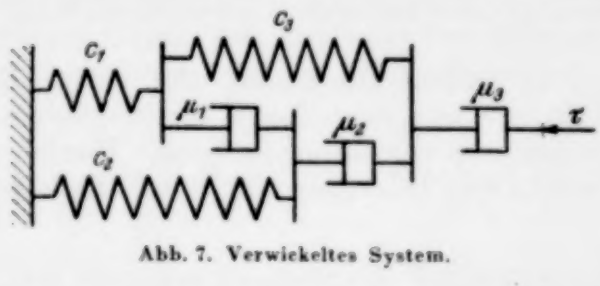


Abb. 7. Verwickeltes System.

Das sind vier Gleichungen mit den vier Unbekannten γ bei gegebenem τ. Unter Verwendung der Operatorenmethode lassen sich die Unbekannten bestimmen, z. B. γ aus

$$\begin{vmatrix} \mu_3 D & 0 & 0 & -\mu_3 D \\ 0 & -c_3 & -\mu_2 D & \mu_2 D + c_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & -(\mu_1 D + c_1 + c_3) & \mu_1 D & c_3 \end{vmatrix} \gamma = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 & -\mu_3 D \\ \tau & -c_3 & -\mu_2 D & \mu_2 D + c_3 \\ \tau & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & -(\mu_1 D + c_1 + c_3) & \mu_1 D & c_3 \end{vmatrix}, \tag{49}$$

woraus erhalten wird

$$a_1 D\gamma + a_2 D^2\gamma + a_3 D^3\gamma = b_0\tau + b_1 D\tau + b_2 D^2\tau + b_3 D^3\tau \tag{50}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= c_1c_2c_3\mu_3, \\ a_2 &= [(c_1+c_2)c_3\mu_1 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)\mu_2]\mu_3, \\ a_3 &= (c_1+c_2)\mu_1\mu_2\mu_3, \\ b_0 &= c_1c_2c_3, \\ b_1 &= (c_1+c_2)c_3\mu_1 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)\mu_2 + (c_1+c_3)c_2\mu_3, \\ b_2 &= (c_1+c_2)\mu_1\mu_2 + (c_1+c_2+c_3)\mu_1\mu_3 + (c_1+c_3)\mu_2\mu_3, \\ b_3 &= \mu_1\mu_2\mu_3. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Die Glieder lassen sich auch umformen auf $b_0 = 1$, $a_1 = \mu_3, \cdots$

Das Modell liefert also auch nichts Neues. Es ist, wie alle anderen derartigen Modelle, nur ein Sonderfall des allgemeinsten Falles für parallelgerichtete lineare Federn und Dämpfer, der durch das System von Abb. 6 oder von Abb. 6a verkörpert wird.

[1] *T. Alfrey* und *P. Doty*, J. appl. Phys. 16 (1945) S. 700.

[2] *J. M. Burgers*, Mechanical considerations concerning viscosity and plasticity. Aus: First Report on Viscosity and Plasticity. Verhandl. der Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Afd. Naturk. (I. Sect.) Dl XV Nr. 3 (1935).

Mit den geschilderten Modellen läßt sich ein weiter Bereich von Fließvorgängen erfassen. Wir haben es in den einzelnen Fällen mit Sonderausführungen des allgemeinsten Falles zu tun, wobei die Stoffkonstanten verschiedenste Werte und Größenordnungen annehmen können, z. B. auch für einzelne Glieder unendlich groß werden können, womit dann diese Einflußteile verschwinden. Z. B. kann $\mu_0 \to \infty$ gehen, wobei dann keine bleibenden Verformungen mehr auftreten würden. Es ist nun die Aufgabe, bei praktischen Behandlungen von Fließvorgängen die Auswahl des anzusetzenden Modells so zu treffen, daß möglichst mit geringem Berechnungsaufwand die tatsächlichen Fließeigenschaften recht gut wiedergegeben werden.

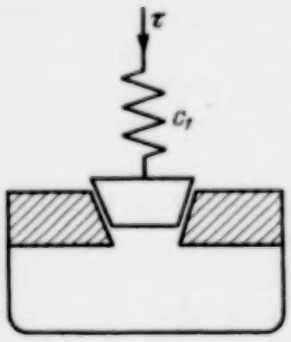


Abb. 8. System mit elastischen und plastischen Verformungen ohne Zeiteinfluß.

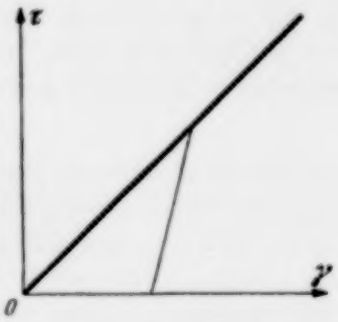


Abb. 8a. Belastungs-Verformungs-Diagramm für nebenstehendes Modell.

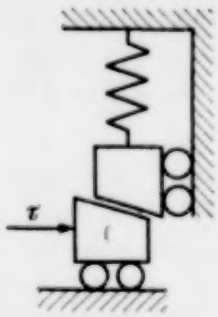


Abb. 9. Modell mit Keilwirkung (rein plastische Verformungen ohne Zeiteinfluß).

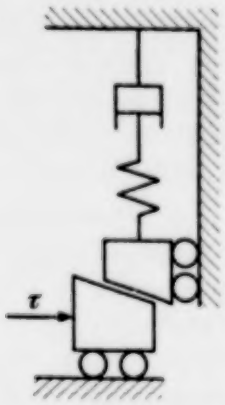


Abb. 10. System mit Zeiteinfluß.

7. Modelle mit Keilen. Die bisher nur aus Federn und Dämpfern aufgebaute Modellreihe läßt sich nun doch durch Hinzunahme von weiteren Gliedern erweitern, z. B. unter Berücksichtigung von fester Reibung. Hierbei wird zunächst das Modell von Abb. 8 erwähnt. Bei einer Druckbelastung tritt eine Einfederung der oberen Feder von der Größe $\gamma_1 = \tau/c_1$ ein. Zusätzlich verschiebt sich der Konus, und zwar auch um einen der Belastung proportionalen Betrag, da die Normalkräfte am Reibungskonus durch die untere Feder proportional mit dem Eindrückungsweg des Konus steigen sollen. Der Konus soll selbsthemmend sein, so daß bei Entlasten nur die obere Feder zurückgeht. Das System weist also einen elastischen und einen plastischen Anteil auf. Bei Wiederbelasten wird die Feder wieder einfedern, der Konus sich dagegen erst nach Erreichen der Vorbelastung bewegen. Entsprechend gilt das Diagramm in Abb. 8a. Ein Einfluß der Vorbelastung liegt also bei diesem System vor, ein Zeiteinfluß nicht.

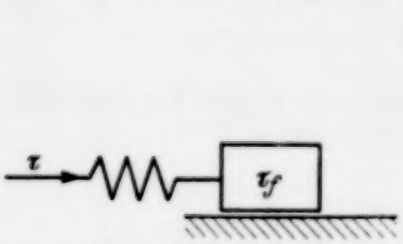


Abb. 11. Modell für den ideal plastischen Körper.

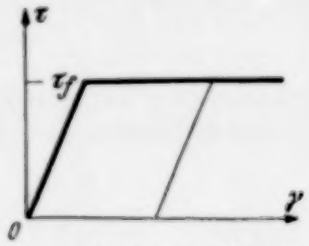


Abb. 11a. Belastungs-Verformungs-Diagramm für nebenstehendes Modell.

Ein Modell für den einfachen Fall rein plastischer Verformung ohne elastischen Verformungsanteil ist in Abb. 9 gezeichnet. Weiter ist in Abb. 10 ein System mit Keil angegeben, bei dem die Belastungszeit von Einfluß auf die Verformungsgröße ist. Damit lassen sich die verschiedensten Überlagerungen vornehmen.

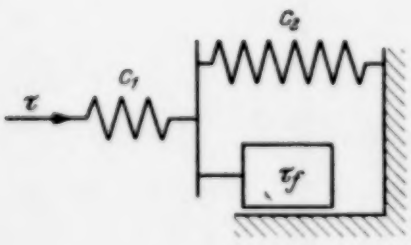


Abb. 12. Modell für elastisch-plastischen Körper mit Verfestigung.

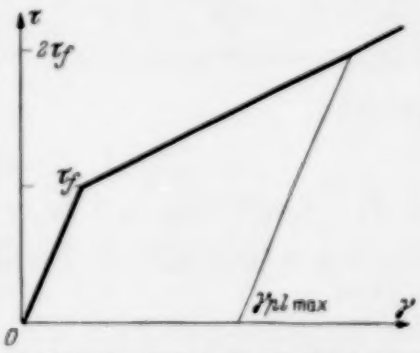


Abb. 12a. Belastungs-Verformungs-Diagramm für nebenstehendes Modell.

8. Elastisch-plastischer Körper. Als nächstes System wird das sog. *de Saint-Venant*sche wiedergegeben. Dabei tritt nach einem elastischen Bereich ein plastischer hinzu, bei dem kein Anwachsen der Spannung mehr auftreten soll (Abb. 11a). Dieser Idealfall gibt eine Näherung für das Verhalten bestimmter fester Körper in beschränkten Bereichen wieder. Das dazugehörige Modell ist in Abb. 11 skizziert. Der Reibungsstein darin soll andeuten, daß vor Erreichen einer Grenzreibung τ_f der Stein sich nicht bewegt, bei Bewegung er dagegen stets die Reibungs-

größe τ_f überträgt. In Abb. 12 ist noch ein System mit elastischem Anteil und plastischem Anteil mit sog. Verfestigung wiedergegeben. Das Spannungs-Dehnungs-Schaubild dafür ist in Abb. 12a wiedergegeben. Zu bemerken ist dazu, daß bei Zurückgehen der Belastung im Bereich $\tau < \tau_f$ vollständige elastische Rückfederung, im Bereich $\tau_f < \tau < 2\,\tau_f$ nur Rückfederung der ersten Feder und im Bereich $\tau > 2\,\tau_f$ auch Rückfederung der zweiten Feder bis auf $\gamma_{pl\,max} = \tau_f/c_2$ auftritt. In Abb. 13 ist weiterhin ein System „mit Spiel" aufgezeichnet, bei dem sich die in Abb. 13a dargestellte Gesetzmäßigkeit herausstellt, die mit gewissen Idealisierungen praktisch bei Stahlzugversuchen auftritt. Man sieht, wie man durch Hinzunehmen verschiedener Besonderheiten immer mehr Varianten erfassen kann.

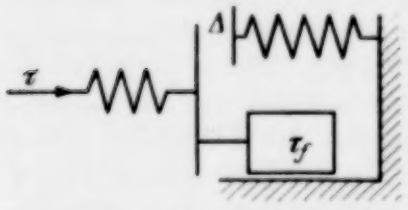


Abb. 13. Modell mit Fließgrenze und Verfestigung mit Spiel.

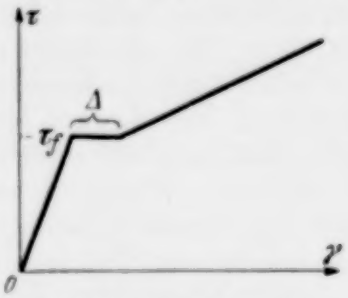


Abb. 13a. Belastungs-Verformungs-Diagramm für nebenstehendes Modell.

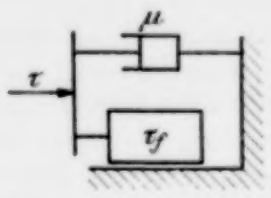


Abb. 14. Modell für *Bingham*-Körper.

Abb. 14a. Zusammenhang zwischen Belastung und Verformungsgeschwindigkeit für nebenstehendes Modell.

9. Systeme mit Fließgrenzen. Durch Hinzunahme eines Gliedes mit *Coulomb*scher Reibung kann das Auftreten einer Fließfestigkeitsgrenze berücksichtigt werden. Das Gesetz von *Bingham*

$$\left.\begin{aligned} \tau < \tau_f: &\qquad D\gamma = 0\,, \\ \tau > \tau_f: &\qquad D\gamma = \frac{1}{\mu}\,(\tau - \tau_f) \end{aligned}\right| \quad (\tau = \tau_f + \mu\, D\gamma) \tag{52}$$

(Abb. 14a) wird durch das Modell von Abb. 14 erfüllt, bei dem dem Dämpfer ein Reibungsglied parallel zugeschaltet ist.

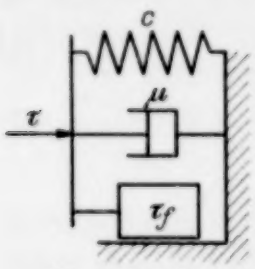


Abb. 15. *Kelvin-Bingham*-Modell.

Abb. 15a. Verformungsverlauf an nebenstehendem Modell für zeitweilig gleichbleibende Belastung.

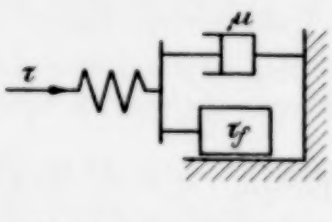


Abb. 16. *Maxwell-Bingham*-Modell.

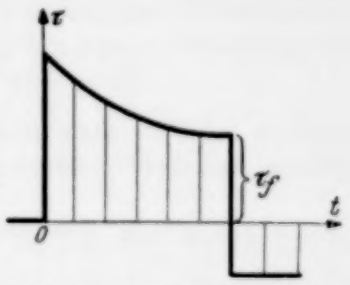


Abb. 16a. Spannungsverlauf an nebenstehendem Modell für zeitweilig gleichbleibend. Verformung.

Einige weitere Kombinationen sind in Abb. 15 und 16 wiedergegeben. Bei dem System von Abb. 15 mit parallelgeschalteten Elementen (verallgemeinertes *Kelvin*-Modell) bleibt nach einer Belastung stets eine bleibende Verformung erhalten, deren Größe bei hinreichender Belastungsgröße und -dauer τ_f/c wird (Abb. 15a). Bei dem System von Abb. 16 (verallgemeinertes *Maxwell*-Modell) geht der Relaxationsvorgang nicht bis auf $\tau = 0$ für $t \to \infty$, sondern auf τ_f zurück (Abb. 16a). Für $|\tau| < \tau_f$ tritt bei $\gamma =$ konst. keine Spannungsänderung auf. Entsprechende Verläufe können auch bei Überlagerungen festgestellt werden.

Die Unterscheidung der Fließvorgänge ist nicht nur eine Frage der verschiedenen Systeme, sondern auch der Größenordnung der einzelnen Stoffbeiwerte (c, μ). Es kann i. a. der allgemeinste Fall als vorliegend angenommen werden[1], wovon lediglich für einige extreme Beiwertgrößen (≈ 0 oder ∞) einzelne Glieder praktisch verschwinden, wodurch dann etwa die einzelnen Sonderfälle (*Maxwell-* oder *Kelvin*-Körper) zum Vorschein kommen können.

Eine mathematische Untersuchung von nichtlinearen Ansätzen für die Eigenschaften der Elemente steht noch aus.

(Eingegangen am 10. August 1952.)

Dr.-Ing. *E. Mewes*, Braunschweig-Völkenrode, Institut für Landtechnische Grundlagenforschung.

[1] *M. Reiner*, Deformation and Flow. Lewis, London 1949.

Zur Theorie und Anwendung der schiefen Platte*.

Von J. Krettner.

1. Einleitung. In der Bautechnik ist neuerdings in mehreren Arbeiten[1] das beim Brückenbau auftauchende Problem der Durchbiegung einer schiefen Platte behandelt worden, bei der jedenfalls zwei Achsen eine schiefe Lage aufweisen, während die dritte Achse senkrecht zur Ebene jener beiden Achsen angenommen wird. Es erscheint daher zweckmäßig, die Formeln der Elastizitätstheorie ganz allgemein auf schiefwinklige Koordinaten zu reduzieren, um allen auftretenden Sonderfragen gerecht zu werden. Die direkte Methode der Koordinatentransformation erweist sich als ziemlich umständlich und oft auch schwierig. Ein in jeder Weise befriedigendes Hilfsmittel, bei dem die übliche Gleichgewichtsbetrachtung am Elementarkörper vermieden wird, muß die Methode der Tensorrechnung gelten. Im Folgenden sollen nun die Grundformeln für schiefwinklige Achsen zusammengestellt und auf die schiefe Platte angewandt werden, in der Absicht, die Sonderbehandlung der Durchbiegung einer schiefen Platte vorzubereiten.

2. Vektor im schiefwinkligen Koordinaten. Sind x^1, x^2 x^3 die Koordinaten des Raumpunktes P in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i (i=1, 2, 3)$, wobei $\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k = 1$ bzw. 0 für $i=k$ bzw. $i \neq k$ ist, so ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Punktes P in bezug auf dieses System in der Form $\mathfrak{r} = \sum x^i \mathfrak{e}_i$ darstellbar. In diesem kartesischen System werden nun drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}_k (k=1, 2, 3)$ mittels der Gleichungen $\mathfrak{a}_k = \sum a_k^i \mathfrak{e}_i (k=1, 2, 3)$ als Grundvektoren eines schiefwinkligen Koordinatensystems (u^1, u^2, u^3) mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_k = \mathfrak{a}_k/|\mathfrak{a}_k|$ in Richtung der schiefwinkligen Achsen gewählt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die drei Vektoren $\mathfrak{a}_k$ von einander linear unabhängig sind, ihre Determinante also verschieden von Null ist: $A = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \neq 0$. Der zum Raumpunkt P führende Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ist in diesem schiefwinkligen System durch

$$\mathfrak{r} = \sum_{k=1}^{3} \bar{u}^k n_k = \sum_{k=1}^{3} u^k \mathfrak{a}_k \qquad \text{mit} \qquad u^k = \frac{\bar{u}^k}{|\mathfrak{a}_k|} \tag{1}$$

gegeben. Führt man noch das zum schiefwinkligen System gehörende reziproke (u_1, u_2, u_3)-System mit den Grundvektoren $\mathfrak{a}^k (k=1, 2, 3)$ ein, so ist definitionsgemäß:

$$\mathfrak{a}^1 = \frac{\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)}, \qquad \mathfrak{a}^2 = \frac{\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)}, \qquad \mathfrak{a}^3 = \frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3)},$$

wobei $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}^k = 1$ bzw. 0 für $i=k$ bzw. $i \neq k$ ist. Die drei Einheitsvektoren im reziproken System sind dabei durch $\mathfrak{n}^k = \mathfrak{a}^k/|\mathfrak{a}^k|$ gegeben. Im reziproken System hat der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ die Darstellung

$$\mathfrak{r} = \sum_{k=1}^{3} \bar{u}_k \mathfrak{n}^k = \sum_{k=1}^{3} u_k \mathfrak{a}^k \qquad \text{mit} \qquad u_k = \frac{\bar{u}_k}{|\mathfrak{a}^k|}. \tag{2}$$

Bezeichnet man das skalare Produkt $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_k$ mit g_{ik} bzw. $\mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{a}^k$ mit g^{ik}, so erhält man für die Projektion des Vektors $\mathfrak{r}$ auf die schiefwinklige Achse $\mathfrak{a}_k$ die Beziehung $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_k = \sum u^i g_{ik} = u_k$, für die Projektion auf die reziproke Achse dagegen $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}^k = \sum u_i g^{ik} = u^k$. Damit ist zugleich der Zusammenhang zwischen den sog. kovarianten Komponenten u_k und den kontravarianten Komponenten u^k des Vektors $\mathfrak{r}$ gegeben.

Für das Differential des Ortsvektors $\mathfrak{r} = \sum u^i \mathfrak{a}_i$ bzw. $\mathfrak{r} = \sum u_i \mathfrak{a}^i$ erhält man $d\mathfrak{r} = \sum du^i \mathfrak{a}_i$ bzw. $d\mathfrak{r} = \sum du_i \mathfrak{a}^i$, woraus durch skalare Multiplikation mit den entsprechenden Achsenvektoren für die Differentiale der Komponenten $du^i = \mathfrak{a}^i \cdot d\mathfrak{r}$ bzw. $du_i = \mathfrak{a}_i \cdot d\mathfrak{r}$ folgt.

---

* Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich den Herren *W. Müller*, München und *K. Kammüller*, Karlsruhe (Institut f. Beton und Stahlbeton).

[1] *P. Lardy*, Schweiz. Bauztg. 67 (1949) S. 207 und 419; *H. Favre*, Schweiz. Bauztg. (1942), S. 35, 51, 60; *H. Favre*, Bulletin Techn. de la Suisse Romane (1946), S. 321; *I. Nielsen*, Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten, Akademie der Techn. Wissenschaften; *Vogt*, Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten, Diss, Hannover 1939; *Rongveld*, Über das Randwertproblem schiefwinkliger Platten, Diss. Berlin 1945.

3. Gradiententensor im schiefwinkligen System. Ist nun ein beliebiger Vektor $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}(u^1, u^2, u^3)$ durch $\mathfrak{v}=\sum_{i=1}^{3} v^i \mathfrak{a}_i$ gegeben, so ist sein Differential, wenn wir noch für die partielle Ableitung die Abkürzung $\partial\mathfrak{v}/\partial u^i=\mathfrak{v}_i$ einführen

$$d\mathfrak{v}=\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{v}_i\,du^i=\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{v}_i\,(d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}^i)=\sum_{i=1}^{3}d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{v}_i=d\mathfrak{r}\cdot\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{v}_i=d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{B}\,, \tag{3}$$

wobei mit $\mathfrak{B}$ der Tensor zweiter Stufe, der sog. Gradiententensor des Vektors $\mathfrak{v}$ bezeichnet wird. Setzen wir die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{B}=\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{a}^i\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum_{i=1}^{3}v^k\mathfrak{a}_k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}\mathfrak{a}^i\mathfrak{a}_k\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\,.$$

Wenn wir den Vektor $\mathfrak{v}$ in der Form $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}(u_1, u_2, u_3)=\sum_{i=1} v_i\mathfrak{a}^i$ nehmen, so wird der Gradiententensor von $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{B}=\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{a}_i\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial u_i}=\sum_{i=1}^{3}\mathfrak{a}_i\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{k=1}^{3}v_k\,\mathfrak{a}^k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}^k\,\frac{\partial v_k}{\partial u_i}\,. \tag{4}$$

4. Deformationskomponenten im schiefwinkligen System. In einem elastischen Medium sollen nun den einzelnen Punkten durch irgendeine Deformation die Verrückungen $\mathfrak{v}$ zugeordnet werden. Erfährt der Punkt P_0 die Verrückung $\mathfrak{v}_0$, so erfährt der von P_0 um $d\mathfrak{r}$ entfernte Punkt P die Verrückung $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0+d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{B}$.

Bezeichnet man mit $\overline{\mathfrak{B}}$ den zum Tensor $\mathfrak{B}$ konjugierten Tensor

$$\overline{\mathfrak{B}}=\sum\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial u_i}\mathfrak{a}^i\,, \tag{5}$$

so kann man den Tensor $\mathfrak{B}$ als Summe der beiden Tensoren $\mathfrak{D}=\frac{1}{2}(\mathfrak{B}+\overline{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}(\mathfrak{B}-\overline{\mathfrak{B}})$ darstellen, der symmetrische Teil $\mathfrak{D}$ bewirkt die reine Deformation des Bereichs, während der antisymmetrische Teil $\mathfrak{A}$ eine infinitesimale starre Drehung des Bereiches um P bestimmt. Es ist also stets $\mathfrak{B}=\mathfrak{D}+\mathfrak{A}$. Wenn man also vom Gradiententensor $\mathfrak{B}$ den antisymmetrischen Teil $\mathfrak{A}$ abspaltet, erhält man den Tensor der reinen Deformation $\mathfrak{D}$, und es ist

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{2}(\mathfrak{B}+\overline{\mathfrak{B}})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\mathfrak{a}^i\mathfrak{v}_i+\mathfrak{v}_i\mathfrak{a}^i)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial v^k}{\partial u^i}(\mathfrak{a}^i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_k\mathfrak{a}^i)\,. \tag{6}$$

Skalare Multiplikation von $\mathfrak{D}$ mit dem Vektor $\mathfrak{a}_\varrho$ ergibt den Vektor $\mathfrak{a}_\varrho\cdot\mathfrak{D}$, der durch nochmalige skalare Multiplikation mit $\mathfrak{a}_\sigma$ die skalare Größe

$$D_{\varrho\sigma}=D_{\sigma\varrho}=\mathfrak{a}_\sigma\cdot(\mathfrak{a}_\varrho\cdot\mathfrak{D})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^\varrho}g_{\sigma\varrho}\frac{\partial v^k}{\partial u^\varrho}+g_{\varrho k}\right) \tag{7}$$

ergibt, die für $\sigma=\varrho$ in

$$D_{\varrho\varrho}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v^k}{\partial u^\varrho}g_{\varrho k} \tag{8}$$

übergeht. Damit ist dann die Dehnung in Richtung des Vektors $\mathfrak{a}_\varrho$ durch

$$\varepsilon_{\varrho\varrho}=\frac{D_{\varrho\varrho}}{g_{\varrho\varrho}} \tag{9}$$

und die Winkelausweitung der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_\varrho$ und $\mathfrak{a}_\sigma$ durch

$$-\varepsilon_{\varrho\sigma}=\frac{1}{\sqrt{g_{\varrho\varrho}\,g_{\sigma\sigma}-g_{\varrho\sigma}^2}}\left[2\,D_{\varrho\sigma}-g_{\varrho\sigma}\left(\frac{D_{\varrho\varrho}}{g_{\varrho\varrho}}+\frac{D_{\sigma\sigma}}{g_{\sigma\sigma}}\right)\right] \tag{10}$$

gegeben.

5. Der Spannungstensor in schiefwinkligen Koordinaten. Betrachtet man ein Parallelflach mit den Kanten parallel zu den Achsen des schiefwinkligen Systems, so sind die flächennormalen Einheitsvektoren die reziproken Einheitsvektoren $\mathfrak{n}^k=\mathfrak{a}/|\mathfrak{a}^k|$ des schiefwinkligen Systems. Es sei $\mathfrak{p}_i$ die reduzierte Spannung, die auf das Flächenelement wirkt, welches auf

dem Vektor $\mathfrak{n}^i$ senkrecht steht. Sind p_{ik} die Projektionen dieser reduzierten Spannung auf die Achsenrichtung $\mathfrak{n}^k$, so gilt $\mathfrak{n}^k \cdot \mathfrak{p}_i = p_{ik}$, und der Vektor $\mathfrak{p}_i$ kann in der Form $\mathfrak{p}_i = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}\,\mathfrak{n}_k$ angesetzt werden. Der Spannungstensor $\mathfrak{S}$ selbst ist $\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{n}_i = \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik}\,\mathfrak{n}_i\,\mathfrak{n}_k$.

Da $\mathfrak{n}_k = |\mathfrak{a}^k|\,\mathfrak{a}_k$ ist und $\mathfrak{a}_k = \sum_{i=1}^{3} a_k^i\,\mathfrak{e}_i$, also $\mathfrak{e}_\varrho \cdot \mathfrak{a}_k = a_k^\varrho$, so erhält man für die Spannungskomponenten in bezug auf die Achsenrichtungen folgende Werte:

$$\bar{a}^{\varrho\sigma} = \mathfrak{n}^\sigma \cdot (\mathfrak{n}^\varrho \cdot \mathfrak{S}) = \mathfrak{n}^\sigma \cdot \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik}\,(\mathfrak{n}^\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\,\mathfrak{n}_k = \mathfrak{n}^\sigma \cdot \sum_{k} p_{\varrho k}\,\mathfrak{n}_k = \sum p_{\varrho k}\,(\mathfrak{n}^\sigma \cdot \mathfrak{n}_k) = p_{\varrho\sigma},$$

$$a^{\varrho\sigma} = \mathfrak{a}^\varrho \cdot (\mathfrak{a}^\sigma \cdot \mathfrak{S}) = \mathfrak{a}^\sigma \cdot \sum_{i,k} p_{ik}\,(\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\mathfrak{n}_k = \sum_{i,k} p_{ik}\,|\mathfrak{a}^\varrho|\,|\mathfrak{a}^\sigma|\,(\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{a}_i)\,(\mathfrak{a}^\sigma \cdot \mathfrak{a}_k) = p_{\varrho\sigma}\,|\mathfrak{a}^\varrho|\,|\mathfrak{a}^\sigma|,$$

$$a_{\varrho\sigma} = \mathfrak{a}_\varrho \cdot (\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{S}) = \mathfrak{a}_\varrho \cdot \sum_{i,k} p_{ik}\,(\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\,\mathfrak{n}_k = \sum_{i,k} p_{ik}\,(\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\,(\mathfrak{a}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_k) = \sum_{i,k} p_{ik}\,|\mathfrak{a}^i|\,|\mathfrak{a}^k|\,g_{\varrho i}\,g_k^\sigma,$$

$$\bar{a}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{e}_\varrho \cdot (\mathfrak{e}_\sigma \cdot \mathfrak{S}) = \mathfrak{e}_\sigma \cdot \sum_{i,k} p_{ik}\,(\mathfrak{e}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\,\mathfrak{n}_k = \sum_{i,k} p_{ik}\,(\mathfrak{e}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_i)\,(\mathfrak{e}_\varrho \cdot \mathfrak{n}_k) = \sum_{i,k} p_{ik}\,|\mathfrak{a}^i|\,|\mathfrak{a}^k|\,a_i^\varrho\,a_k^\sigma.$$

Für die Projektion der reduzierten Spannung $\mathfrak{p}_i$ auf die Achsenrichtung $\mathfrak{a}^\varrho$ des reziproken Systems erhält man den Wert

$$\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{p}_i = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}\,(\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{n}_k) = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}\,|\mathfrak{a}^k|\,(\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{a}_k) = p_{i\varrho}\,|\mathfrak{a}^\varrho| = a_{i\varrho}^{*}. \tag{11}$$

Bezieht man die einzelnen Spannungskomponenten auf diese Größen, so wird

$$\bar{a}^{\varrho\sigma} = \frac{a_{\varrho\sigma}^{*}}{\sqrt{g^{\varrho\varrho}}}, \qquad a^{\varrho\sigma} = |\mathfrak{a}^\varrho|\,a_{\varrho\sigma}^{*}, \qquad a_{\varrho\sigma} = \sum_{i,k=1}^{3} |\mathfrak{a}^i|\,g_{\varrho i}\,g_{\sigma k}\,a_{ik}^{*}, \qquad a_{\varrho\sigma} = \sum_{i,k=1}^{3} |\mathfrak{a}^i|\,a_i^\varrho\,a_k^\sigma\,a_{ik}^{*}. \tag{12}$$

Der Spannungstensor $\mathfrak{S}$ lautet dann für die verschiedenen Systeme

$$\mathfrak{S} = \sum_{i,k} \bar{a}^{ik}\,\mathfrak{n}_i\,\mathfrak{n}_k = \sum_{i,k} a^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k = \sum_{i,k} a_{ik}\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{a}^k = \sum_{i,k} \bar{a}_{ik}\,\mathfrak{e}_i\,\mathfrak{e}_k.$$

6. Die Gleichgewichtsbedingungen im schiefwinkligen System. Die Bedingung des Gleichgewichts deformierbarer Körper zwischen den äußeren Kräften und den inneren Spannungen in irgendeinem Punkt des Spannungsfeldes lautet bekanntlich $\operatorname{div} \mathfrak{S} + \mathfrak{K} = 0$.

Für den Gradienten des Spannungstensors $\mathfrak{S}$ erhält man, wenn dieser in der Form

$$\mathfrak{S} = \sum_{i,k=1}^{3} a^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$$

angesetzt wird,

$$\operatorname{grad} \mathfrak{S} = \Delta\mathfrak{S} = \sum_{\varrho=1}^{3} \mathfrak{a}^\varrho\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u^\varrho} = \sum_{i,k,\varrho=1}^{3} \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^\varrho}\,\mathfrak{a}^\varrho\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k.$$

Durch Verjüngung entsteht daraus die Divergenz des Spannungstensors

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = \nabla \cdot \mathfrak{S} = \sum_{i,k,\varrho=1}^{3} \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^\varrho}\,(\mathfrak{a}^\varrho \cdot \mathfrak{a}_i)\,\mathfrak{a}_k = \sum_{i,k} \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i}\,\mathfrak{a}_k = \sum_{k=i}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial_a{}^{ik}}{\partial u^i} \right) \mathfrak{a}_k.$$

Wird der Kraftvektor $\mathfrak{K}$ in der Form $\mathfrak{K} = \sum K^k\,\mathfrak{a}_k$ angesetzt, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der schiefwinkligen Achsen:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a^{ik}}{\partial u^i} + K^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Da $a^{ik} = |\mathfrak{a}^i|\,|\mathfrak{a}^k|\,p_{ik} = |\mathfrak{a}^i|\,a_{ik}^{*}$ ist, können wir dafür auch schreiben

$$\sum_{i=1}^{3} |\mathfrak{a}^i|\,\frac{\partial a_{ik}^{*}}{\partial u^i} + K^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{14}$$

7. Das Hookesche Gesetz in schiefwinkligen Koordinaten. Der Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\mathfrak{S}$ und dem Deformationstensor $\mathfrak{D}$ ist durch das *Hooke*sche Gesetz in seiner allgemeinen Fassung gegeben:

$$\mathfrak{S} = 2\mu\,\mathfrak{D} + \lambda D\mathfrak{J}. \tag{15}$$

Darin bedeutet $\mathfrak{J}$ den Einheitstensor $\mathfrak{J} = \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ bzw. $\mathfrak{J} = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{a}^k$ und die Größe D den Skalar des Deformationstensors $\mathfrak{D}$. Wird die Konstante von *Poisson* mit $\varkappa$ bezeichnet, so sind die beiden Konstanten von *Lamé* durch

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+k)} \quad \text{und} \quad \lambda = 2\,\mu\,\frac{k}{1-2k}$$

gegeben. Durch zweimalige skalare Multiplikation mit den Grundvektoren $\mathfrak{a}_k$ bzw. $\mathfrak{a}^k$ erhält man aus dem *Hooke*schen Gesetz die allgemeine Spannungs-Deformations-Beziehung. Für $\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{D} = \sum_{i,k} \varepsilon^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ mit $D = \sum_{i,k} \varepsilon^{ik}\,g_{ik}$ und $\mathfrak{J} = \sum_{i,k} g^{ik}\,\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k$ wird

$$\mathfrak{a}^k \cdot (\mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{S}) = 2\,\mu\,\mathfrak{a}^k \cdot (\mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{D}) + \lambda\,D\,\mathfrak{a}^k \cdot (\mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{J})$$

oder

$$a^{ik} = 2\,\mu\varepsilon^{ik} + \lambda\left(\sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^{ik}\,g_{ik}\right) g^{ik}\,. \tag{16}$$

Für

$$\mathfrak{S} = \sum_{i,k} a_{ik}\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{a}^k,\ \mathfrak{D} = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik}\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{a}^k \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{J} = \sum_{i,k} g_{ik}\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{a}^k$$

erhält man in entsprechender Weise

$$\mathfrak{a}_k \cdot (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{S}) = 2\,\mu\,\mathfrak{a}_k \cdot (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{D}) + \lambda\,D\,\mathfrak{a}_k \cdot (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{J})$$

oder

$$a_{ik} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ik} + \lambda\,D\,g_{ik} \qquad \text{mit} \qquad D = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik}\,g^{ik}\,. \tag{17}$$

Durch Auflösen der allgemeinen *Hooke*schen Beziehung (15) nach dem Deformationstensor $\mathfrak{D}$ ergibt sich

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\,\mu}\,[\mathfrak{S} - \lambda D \mathfrak{J}]\,.$$

Man kann nun noch den Skalar D durch den Skalar S des Spannungstensors ausdrücken, wenn man (15) auf beiden Seiten verjüngt. Man erhält $S = 2\,\mu D + 3\lambda D = (2\,\mu + 2\lambda)\,D$ und damit die beiden Gleichungen, wenn man noch den Wert $\lambda/(2\,\mu + 3\lambda)$ durch $\varkappa$ ausdrückt,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{ik} &= \frac{1+k}{E}\,a^{ik} - \frac{k}{E}\,S\,g^{ik} \qquad \text{mit} \qquad S = \sum_{i,k} a^{ik}\,g_{ik} \\ \text{bzw.} \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{1+k}{E}\,a_{ik} - \frac{k}{E}\,S\,g_{ik} \qquad \text{mit} \qquad S = \sum_{i,k} a_{ik}\,g^{ik}\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

8. Der Differentialausdruck von Laplace in schiefwinkligen Koordinaten. Setzt man für die partielle Ableitung der Funktion $w = w(u^1, u^2, u^3)$ $\dfrac{\partial w}{\partial u^i} = w_i$ und $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^i\,\partial u^k} = w_{ik}$, so ist der Gradiententensor der Ortsfunktion

$$\operatorname{grad} w = \mathfrak{w} = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{a}^i\,w_i\,. \tag{19}$$

Für den Operator $\Delta w = \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = \operatorname{div} \mathfrak{w}$ folgt damit in schiefwinkligen Koordinaten

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}^k \cdot \mathfrak{w}_k = \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{a}^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} \mathfrak{a}^i\,w_{ik}\right) = \sum_{i,k=1}^{3} g^{ki}\,w_{ik}\,. \tag{20}$$

Nochmalige Anwendung des Δ-Operators ergibt schließlich den Differentialausdruck von *Laplace*:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta w = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Delta w) = \operatorname{div} \mathfrak{v} &= \sum_{\sigma=1}^{3} \mathfrak{a}^\sigma \cdot \mathfrak{v}_\sigma \\ &= \sum_{\sigma=1}^{3} \mathfrak{a}^\sigma \cdot \left(\sum_{\varrho} \mathfrak{a}^\varrho \cdot (\Delta w)_{\varrho\sigma}\right) = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{3} g^{\varrho\sigma}\,(\Delta w)_{\varrho\sigma} \\ &= \sum_{\varrho,\sigma=1}^{3} g^{\varrho\sigma}\left(\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\,w_{ik\varrho\sigma}\right) = \sum_{i,k,\varrho,\sigma=1}^{3} g^{ik}\,g^{\varrho\sigma}\,w_{ik\varrho\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei $w_{ik\varrho\sigma} = \dfrac{\partial^4 w}{\partial u^i\,\partial u^k\,\partial u^\varrho\,\partial u^\sigma}$ ist.

9. Die schiefe Platte. Mit Hilfe dieser Formeln sollen nun die für die Berechnung der schiefen Platte notwendigen Gleichungen ermittelt werden. Die eine Kante der schiefen Platte sei dabei senkrecht zur Ebene der beiden anderen Kanten angenommen. Die Achsen des Koordinatensystems sollen in den Kanten des Parallelflachs fallen und auf ein kartesisches Koordinatensystem mit demselben Nullpunkt bezogen werden. Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zu einem Plattenpunkt ist dann in den beiden Formen darzustellen:

$$\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathfrak{e}_i \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{3} u^i \mathfrak{a}_i . \tag{22}$$

Es ist (Abb. 1)

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{e}_1 , \quad \mathfrak{a}_2 = \sin\varphi\, \mathfrak{e}_1 + \cos\varphi\, \mathfrak{e}_2 , \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{e}_3 , (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3) = \cos\varphi ,$$

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{e}_1 - \operatorname{tg}\varphi\, \mathfrak{e}_2 , \quad \mathfrak{a}^2 = \frac{1}{\cos\varphi}\, \mathfrak{e}_2 , \quad \mathfrak{a}^3 = \mathfrak{e}_3 ,$$

$$g_{11} = \mathfrak{a}_{22} = g_{33} = 1 , \; g_{12} = g_{21} = \sin\varphi , \; g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0 ,$$

$$g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\cos^2\varphi} , \quad g^{33} = 1 , \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} , \quad g^{13} = g^{23} = g^{31} = g^{32} = 0 ,$$

$$a_1^1 = 1 , \; a_1^2 = 0 , \; a_1^3 = 0 , \; a_2^1 = \sin\varphi , \; a_2^2 = \cos\varphi , \; a_2^3 = 0 , \; a_3^1 = 0 , \; a_3^2 = 0 , \; a_3^3 = 1 .$$

Für den Zusammenhang der schiefwinkligen und rechtwinkligen Koordinaten folgt aus (22)

$$x^k = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{e}_k = \sum_{i=1}^{3} u^i (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{e}_k) \qquad \text{bzw.} \qquad u^k = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}^k = \sum_{i=1}^{3} x^i (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a}^k)$$

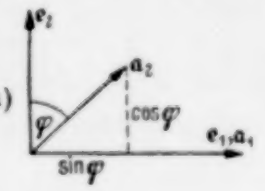


Abb. 1. Koordinatensystem für die schiefe Platte.

also

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= u^1 + \sin\varphi\, u^2 , \quad x^2 = \cos\varphi\, u^2 , \quad x^3 = u^3 , \\ u^1 &= x^1 - \operatorname{tg}\varphi\, x^2 , \quad u^2 = \frac{1}{\cos\varphi}\, x^2 , \quad u^3 = x^3 . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Setzen wir den Vektor der Verrückung in der Form

$$\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{3} \overline{v}^i \cdot \mathfrak{e}_i = \sum_{i=1}^{3} v^i \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{3} v_i \mathfrak{a}^i$$

an, so erhalten wie für seine kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten

$$v_i = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{3} \overline{v}_i (\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{e}_i) \qquad \text{bzw.} \qquad v^i = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}^i = \sum_{i=1}^{3} \overline{v}_i (\mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{e}_i) ,$$

also

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \overline{v}^1 , \quad v_2 = \sin\varphi\, \overline{v}^1 + \cos\varphi\, \overline{v}^2 , \quad v_3 = \overline{v}^3 , \\ v^1 &= \overline{v}^1 - \operatorname{tg}\varphi\, \overline{v}^2 , \quad v^2 = \frac{1}{\cos\varphi}\, \overline{v}^2 , \quad v^3 = \overline{v}^3 . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Aus der Formel (8) folgt, da in dem Falle der schiefen Platte alle $g_{ii} = 1$ sind, für die Dehnungen in Richtung der Achsen des schiefwinkligen Systems

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v^1}{\partial u^1} + \sin\varphi\, \frac{\partial v^2}{\partial u^1} , \quad \varepsilon_{22} = \sin\varphi\, \frac{\partial v^1}{\partial u^2} + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} , \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v^3}{\partial u^3} . \tag{25}$$

Da $g_{13} = g_{31} = 0$ und $g_{23} = g_{32} = 0$ ist, ergeben die Formeln (7) die Winkelausweitungen

$$\left.\begin{aligned} -\varepsilon_{13} = -\varepsilon_{31} = 2\, D_{13} &= \frac{\partial v^3}{\partial u^1} + \frac{\partial v^1}{\partial u^3} + \sin\varphi\, \frac{\partial v^2}{\partial u^3} , \\ -\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{32} = 2\, D_{23} &= \frac{\partial v^2}{\partial u^3} = \frac{\partial v^3}{\partial u^2} + \sin\varphi\, \frac{\partial v^1}{\partial u^3} . \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Für die Winkelausweitung $-\varepsilon_{12}$ folgt mit

$$2\, D_{12} = \frac{\partial v^1}{\partial u^2} + \frac{\partial v^2}{\partial u^1} + \sin\varphi \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1} + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \right)$$

aus (10)

$$-\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \cos\varphi \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2} + \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \right) . \tag{27}$$

Um noch den Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Winkelausweitungen im rechtwinkligen und schiefwinkligen System zu erhalten, müssen mittels den Formeln (24) die

Komponenten v^i durch die Komponenten $\bar{v}^1$ ausgedrückt und die Ableitungen nach den u^i nach der allgemeinen Formel

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^\varrho} = \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial v^\sigma}{\partial u^\sigma} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^\varrho}$$

berechnet werden. Werden die Deformationskomponenten in bezug auf die kartesischen Achsen durch

$$\bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial x^i} \qquad \text{und} \qquad \bar{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial x^i}$$

ausgedrückt, so ergeben die Formeln (25) die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \bar{\varepsilon}_{11}\,, \quad \varepsilon_{22} = \sin^2\varphi\,\bar{\varepsilon}_{11} + \sin\varphi\cos\varphi\,\bar{\varepsilon}_{12} + \cos^2\varphi\,\bar{\varepsilon}_{22}\,, \quad \varepsilon_{33} = \bar{\varepsilon}_{33}\,,\\ &\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \cos\varphi\,[(\bar{\varepsilon}_{11} - \varepsilon_{22})\sin\varphi + \bar{\varepsilon}_{12}\cos\varphi]\,, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{31}\,,\\ &\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \bar{\varepsilon}_{13}\sin\varphi + \bar{\varepsilon}_{23}\cos\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Für die Projektionen der Spannungen auf die Achsen des schiefwinkligen Systems ergeben die Formeln (12) die Werte

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \frac{1}{\cos\varphi}[a^*_{11} + 2\sin\varphi\,a^*_{12} + \sin^1\varphi\,a^*_{22}]\,, \quad a_{22} = \frac{1}{\cos\varphi}\sin^2\varphi\,a^*_{11} + 2\sin\varphi\,a^*_{12} + a^*_{22}]\,,\\ &a_{33} = a^*_{33}\,,\\ &a_{12} = a_{21} = \frac{1}{\cos\varphi}[(a^*_{11} + a^*_{22})\sin\varphi + (1 + \sin^2\varphi)\,a^*_{12}]\,,\\ &a_{13} = a_{31} = \frac{1}{\cos\varphi}[a^*_{13} + \sin a^*_{23}]\,, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{1}{\cos\varphi}[\sin\varphi\,a^*_{13} + a^*_{23}]\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Projektionen der Spannungen auf die Achsen des rechtwinkligen Systems erhält man ebenfalls aus den Formeln (12):

$$\left.\begin{aligned} &\bar{a}_{11} = \frac{1}{\cos\varphi}[a^*_{11} + 2\sin\varphi\,a^*_{12} + \sin^2\varphi\,a^*_{22}]\,, \quad \bar{a}_{22} = \cos\varphi\,a^*_{22}\,, \quad \bar{a}_{33} = \bar{a}^*_{33}\,,\\ &\bar{a}_{12} = a^*_{12} + \sin\varphi\,\bar{a}^*_{13}\,, \quad \bar{a}_{13} = \frac{1}{\cos\varphi}(a^*_{13} + \sin\varphi\,a^*_{23})\,, \quad \bar{a}_{23} = \bar{a}_{32} = a^*_{23} = a^*_{32}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach den a^*_{ik} folgt der Zusammenhang zwischen den Projektionen auf die rechtwinkligen und reziproken Achsen:

$$\left.\begin{aligned} &a^*_{11} = \cos\varphi\,\bar{a}_{11} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\bar{a}_{22} - 2\sin\varphi\,\bar{a}_{12}\,, \quad a^*_{12} = \bar{a}_{12} - \operatorname{tg}\varphi\,\bar{a}_{22}\,, \quad a^*_{22} = \frac{1}{\cos\varphi}\bar{a}_{22}\\ &a^*_{13} = \cos\varphi\,\bar{a}_{13} - \sin\varphi\,\bar{a}_{23}\,, \quad a^*_{23} = \bar{a}_{23}, \quad a^*_{33} = \bar{a}_{33}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die Formeln (14) ergeben die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der Achsen des schiefwinkligen Systems:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a^*_{ik}}{\partial u^i} + K^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)\,.$$

Aus (16) und (18) folgt der Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Deformationskomponenten:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \frac{E}{1+k}\left[\varepsilon_{ii} + \frac{k}{(1-2k)\cos^2\varphi}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 2\sin\varphi\,\varepsilon_{12})\right]\,,\\ &a_{12} = \frac{E}{1+k}\left[\varepsilon_{12} - \frac{k\sin\varphi}{(1-2k)\cos^2\varphi}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 2\sin\varphi\,\varepsilon_{12})\right]\,,\\ &a_{13} = \frac{E}{1+k}\varepsilon_{13}\,,\\ &a_{23} = \frac{E}{1+k}\varepsilon_{23}\,. \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{32}$$

Für den Gradienten, Δw-Operator und den Differentialausdruck von *Laplace* ergeben die

Formeln (19), (20) und (21) die Werte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \operatorname{grad} w = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{a}^i \frac{\partial w}{\partial u^i}, \\ \Delta w &= \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}} - 2\sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2}\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial u^{32}}, \\ \Delta\Delta w &= \frac{1}{\cos^4\varphi}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial u^{14}} + \frac{\partial^4 w}{\partial u^{24}} + 2\,(1+2\sin^2\varphi)\,\frac{\partial^4 w}{\partial u^{12}\,\partial u^{22}} - 4\sin\varphi\left(\frac{\partial^4 w}{\partial u^{13}\,\partial u^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial u^2\,\partial u^{13}}\right)\right], \\ &\quad + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[2\,\frac{\partial^4 w}{\partial u^{12}\,\partial u^{32}} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial u^{22}\,\partial u^{32}} + \cos^2\varphi\,\frac{\partial^4 w}{\partial u^{34}}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Dabei fallen für dünne Platten die Ableitungen nach der dritten Koordinate noch weg.

Die Formeln (23) liefern für die Ableitungen der Koordinaten die Werte

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} = 1\,, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - = \operatorname{tg}\varphi\,, \qquad \frac{\partial u^2}{\partial x^1} = 0\,, \qquad \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

und damit erhalten wir für die Ableitung der Funktion $w = w(x^1, x^2) = w(u^1, u^2)$ selbst

$$\frac{\partial w}{\partial x^1} = \frac{\partial w}{\partial u^1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x^2} = -\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial w}{\partial u^1} + \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\partial w}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^{22}} = \operatorname{tg}^2\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}} - 2\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}}.$$

Setzt man diese Werte in die bekannten Formeln für rechtwinklige Systeme

$$\bar{a}_{11} = -\frac{E x^3}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^{12}} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^{22}}\right], \quad \bar{a}_{22} = -\frac{E x^3}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^{22}} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^{22}}\right], \quad \bar{a}_{12} = -\frac{E x^3}{1+\mu}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^1 \partial x^2}$$

ein, so erhält man aus den Gleichungen (31) unter Verwendung der Gleichungen (33) schließlich für die Spannungskomponenten in Richtung der reziproken Achsen die Werte

$$\left.\begin{aligned} a^*_{11} &= -\frac{E u^3}{(1-\mu^2)\cos\varphi}\left[\Delta w + (\mu-1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}}\right], \qquad a^*_{22} = -\frac{E u^3}{(1-\mu^2)\cos\varphi}\left[\Delta w + (\mu-1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}}\right., \\ a^*_{12} &= -\frac{E u^3}{(1-\mu^2)\cos\varphi}\left[-\sin\varphi\,\Delta w - (\mu-1)\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Durch Integration über die Plattendicke können nun daraus die Momente berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} M^*_{11} &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} a^*_{11}\,u^3\,du^3 = -\frac{E h^3}{12\,(1-\mu^2)\cos^3\varphi}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}} + \sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}} - 2\sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}}\cos^1\varphi\right], \\ M^*_{22} &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} a^*_{22}\,u^3\,du^3 = -\frac{E h^3}{12\,(1-\mu^2)\cos^3\varphi}\left[\sin^3\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}} - 2\sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{12}}\cos^2\varphi\right], \\ M^*_{12} &= \int_{-h/2}^{+\frac{1}{2}h} a^*_{12}\,u^3\,du^3 = -\frac{E h^3}{12\,(1-\mu^2)\cos^3\varphi}\left[-\sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial a^{12}} - \sin\varphi\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^{22}}\right. \\ &\qquad \left. + (1+\sin^2\varphi)\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2} - \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial u^1\,\partial u^2}\cos^2\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Setzen wir

$$-\frac{E h^3}{12\;(1-\mu)\cos\varphi} = K,$$

so erhalten wir für Summenausdruck

$$M^* = M^*_{11} + M^*_{22} + 2\sin\varphi\,M^*_{12} = K\,\Delta w \qquad (36)$$

und damit

$$\Delta M^* = K\Delta\Delta w\,. \qquad (37)$$

Damit sind die wesentlichen Formeln, die zur Berechnung der schiefen Platte notwendig sind, hergeleitet. In einer späteren Arbeit soll die Durchbiegung der schiefen Platte für besondere Belastungsfälle näher untersucht werden.

(Eingegangen am 25. August 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Josef Krettner*, München, Gentzstr. 5/III/1.

Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben

Von O. Pichler.

1. Einleitung. Für viele größere Industriewerke ist es kennzeichnend, daß sie aus vielen einzelnen Teilbetrieben bestehen, die unter sich stark gekoppelt sind. Der Produktionsablauf eines solchen Betriebssystems ist nun keineswegs immer stationär; denn die zur Verarbeitung gelangenden Rohstoffe ändern sich, das Produktionsprogramm muß den jeweiligen wirtschaftlichen Anforderungen angepaßt werden, und es können Betriebsstörungen in den verschiedenen Teilen auftreten, die sich auf das Gesamtwerk auswirken. In allen diesen Fällen muß die Betriebsleitung in der Lage sein, die Folgen dieser Einflüsse auf den Produktionsablauf zahlenmäßig zu übersehen, um unverzüglich eingreifen und eine unter den vorgegebenen Bedingungen jeweils wirtschaftlich optimale Lage herbeiführen zu können. Aber auch bei der Projektierung neuer Werke und bei wirtschaftlichen Planungen auf weitere Sicht ist die zahlenmäßige Kenntnis des Betriebsablaufes eine notwendige Voraussetzung. Da sich nun die Abläufe der einzelnen Teilbetriebe im allgemeinen einfach übersehen lassen, macht es keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, die Auswirkung irgendeines Einflusses auf die verschiedenen Teilbetriebe rechnerisch weiter zu verfolgen; aber solche Rechnungen sind meist sehr mühsam und liefern das Ergebnis nicht in der gewünschten allgemeinen Form. Und hier bietet sich nun, wie in folgendem gezeigt werden soll, die Matrizenrechnung als ein für solche Probleme geradezu prädestinierter Kalkül an. Bevor die Methode und ihre Anwendungsmöglichkeiten aber in möglichst allgemeiner Form dargelegt werden, erscheint es geboten, sie zunächst an einem konkreten, technischen Beispiel zu erläutern. Als solches Beispiel wurde die großtechnische Herstellung von Wasserstoff gewählt, die u. a. bei der katalytischen Druckhydrierung von Kohlen, Teeren und Mineralölen eine entscheidende Rolle spielt. Was die im folgenden benutzten Formeln der Matrizenrechnung anlangt, so sei auf das Buch von *Zurmühl*[1] verwiesen, dessen Bezeichnungsweise weitgehend übernommen wurde.

Abb. 1. Fließbild der Wasserstofferzeugung.

2. Darstellung von Betriebsvorgängen durch Matrizen bei Einzelbetrieben. In vielen Fällen wird bei der Wasserstoffherstellung vom sogenannten Wassergas ausgegangen, das in „Gasgeneratoren" etwa aus Steinkohlenkoks oder Braunkohlenschwelkoks mit Wasserdampf erzeugt wird und aus Kohlensäure, Kohlenoxyd, Wasserstoff, Stickstoff, Methan und Schwefelwasserstoff besteht. Dieses Wassergas muß nun in die für den Verwendungszweck erforderliche Zusammensetzung übergeführt und auf den dazu notwendigen Druck gebracht werden[2]. Zu diesem Zweck wird es zunächst entschwefelt (Abb. 1), sodann wird das Kohlenoxyd des Wassergases zum größten Teil in der „Konvertierung" zu Wasserstoff und Kohlensäure umgesetzt. Das so erhaltene Gas wird dann auf etwa 30 at komprimiert und hierauf zur Entfernung der Kohlensäure mit Wasser gewaschen. Es folgt eine weitere Kompression auf etwa 300 at, und dann wird in einer Endstufe der Rest an Kohlenoxyd entfernt und damit ein für die Hydrierung geeigneter hochprozentiger Wasserstoff, das sogenannte „Frischgas", erhalten. Das entfernte Kohlenoxyd mit seinen Begleitkomponenten wird gelegentlich als „CO-Rückgas" bezeichnet, weil es, wenn es nicht anderweitig Verwendung findet, in die Konvertierung zurückgeführt wird.

Es soll nun zunächst an dem Beispiel der Konvertierung die matrizenmäßige Darstellung eines Betriebsvorganges gezeigt werden. In der Konvertierung wird Kohlenoxyd unter Zugabe

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

[2] Näheres s. etwa *Krönig*, Die katalytische Druckhydrierung von Kohlen, Teeren und Mineralölen, S. 174—186, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

von Wasserdampf zu Kohlendioxyd und Wasserstoff umgesetzt gemäß der Reaktionsgleichung:

$$CO + H_2O = CO_2 + H_2 .$$

Aus 1 Nm³ CO im Eingangsgas, dem „Durchsatz" (in diesem Fall entschwefeltes Wassergas), entstehen also unter Zugabe von Wasserdampf 1 Nm³ CO_2 und 1 Nm³ H_2 im Ausgangsgas, der „Ausbeute". Vollständigen Umsatz vorausgesetzt, verschwindet also CO, während die Mengen an CO_2 und H_2 sich je um die umgesetzte CO-Menge erhöhen. Stickstoff und Methan bleiben bei dem Prozeß praktisch unverändert. Bezeichnet man nun die einzelnen Komponenten (etwa in Nm³) im Eingangs- bzw. Ausgangsgas gemäß

	Eingangsgas (Durchsatz) Nm³	Ausgangsgas (Ausbeute) Nm³
CO_2	d_1	a_1
CO	d_2	a_2
H_2	d_3	a_3
N_2	d_4	a_4
CH_4	d_5	a_5

so läßt sich der Umwandlungsprozeß, wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 + d_2 , \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \quad d_2 + d_3 , \\ a_4 &= \qquad\quad d_4 , \\ a_5 &= \qquad\qquad d_5 . \end{aligned}$$

Es liegt nun nahe, den Durchsatz und die Ausbeute durch Vektoren gemäß

$$\mathfrak{d} = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Vmatrix}$$

darzustellen und ferner eine „Umsatzmatrix" $\mathfrak{U}$ gemäß

$$\mathfrak{U} = (u_{ik}) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

einzuführen; dann bekommt man für die Darstellung des Umwandlungsprozesses die einfache Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{d}$$

(Ausbeutevektor = Umsatzmatrix mal Durchsatzvektor).

Man erkennt ohne weiteres, daß bei der Konvertierung die Umsatzmatrix singulär ist, da der zweite Zeilenvektor ein Nullvektor ist. Bei der Darstellung der tatsächlichen Betriebsverhältnisse ist die Matrix noch etwas zu modifizieren, da das Kohlenoxyd nicht vollständig umgesetzt, sondern ein festes, wirtschaftlich optimales Verhältnis von $CO : H_2$ eingestellt wird und außerdem noch gewisse Verluste zu berücksichtigen sind. Diese Verhältnisse können durch den Ansatz

$$\begin{aligned} a_2 &= u_2(d_2 + d_3) , \\ a_3 &= u_3(d_2 + d_3) \end{aligned}$$

dargestellt werden, wo $u_2/(u_2 + u_3)$ den CO-Anteil in der $CO + H_2$-Menge bedeutet, der durch betriebstechnische Maßnahmen praktisch konstant gehalten wird und $(u_2 + u_3)$ die „spezifische Ausbeute" an $CO + H_2$ darstellt, die nur wenig kleiner als 1 ist. Die umgesetzte CO-Menge beträgt somit

$$d_2 - a_2 = (1 - u_2)\, d_2 - u_2\, d_3 , \qquad (1)$$

um welche sich die CO_2-Menge erhöht. Die Verluste an den übrigen Komponenten kann man ebenfalls durch „spezifische Ausbeuteziffern" u_1, u_4, u_5 berücksichtigen. Die Umsatzmatrix, die jetzt zum Unterschied von noch zu erörternden anderen Umsatzmatrizen mit $\mathfrak{U}_1$ bezeichnet werden soll, wobei für die spezifischen Ausbeuteziffern aus demselben Grunde noch obere Zeiger eingeführt werden mögen, lautet dann:

$$\mathfrak{U}_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 & 1-u_2^1 & -u_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^1 & u_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & u_3^1 & u_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Auch diese Matrix ist wieder singulär, da sich die dritte Zeile aus der zweiten durch Multiplikation mit u_3^1/u_2^1 ergibt. Dies bedeutet mathematisch, daß sie sich nicht umkehren, also sich nicht $\mathfrak{d}$ aus $\mathfrak{a}$, gemäß $\mathfrak{d}=\mathfrak{U}_1^{-1}\mathfrak{a}$ errechnen läßt; technologisch bedeutet dies, daß man aus der Analyse des Ausgangsgases, der Ausbeute $\mathfrak{a}$, nicht die des Eingangsgases, des Durchsatzes $\mathfrak{d}$, erschließen kann, da ja der Umsatz so geleitet wurde, daß sich im Ausgang ein festes Verhältnis von $CO:H_2$ einstellt. Durch die Umsatzmatrix $\mathfrak{U}$ wird der Betriebsvorgang mathematisch eingefangen. Dabei wird der Umstand, daß der Betriebsvorgang von verschiedenen Einflußgrößen, in diesem Fall von den verschiedenen Komponenten des Durchsatzes abhängt, dadurch berücksichtigt, daß der mehrdimensionale Vektor $\mathfrak{d}$ in die Rechnung eingeht. Auf eines muß hier aber noch ausdrücklich hingewiesen werden: die einzelnen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$ dürfen nicht negativ werden. Dies bedeutet im vorliegenden Fall, daß die Matrix $\mathfrak{U}_1$ nur anwendbar ist, solange

$$(1-u_2^1)\,d_2 - u_2^1\,d_3 \geq 0\,, \quad \text{oder} \quad \frac{d_2}{d_3} \geq \frac{u_2^1}{1-u_2^1}$$

bleibt, da sonst, wenn etwa d_1 gleich Null wäre, sich eine negative CO_2-Menge a_1 ergeben würde. Aber auch bei positivem d_1 gilt diese Grenze für $\frac{d_2}{d_3}$, da bei ihrer Unterschreitung sich gemäß Gleichung (1) die CO-Menge erhöhen würde, und dies ist nicht der Zweck der Konvertierung; Gase, die einen derart niedrigen CO-Gehalt aufweisen, wird man im allgemeinen in eine andere Betriebsstufe leiten. Bei praktischen Rechnungen stört diese Gültigkeitsgrenze der Umsatzmatrix nicht, doch ist immerhin bei formalen Rechnungen eine gewisse Vorsicht am Platze. Wenn oben gesagt wurde, daß durch die Umsatzmatrix $\mathfrak{U}$ der Betriebsvorgang mathematisch dargestellt wird, so ist dies nicht gleichbedeutend mit der zahlenmäßigen Darstellung eines selbständigen Reaktionsablaufes. Die Reaktionsbedingungen sind zwar implizit in den Matrizenelementen enthalten; daneben aber auch die durch die Apparatur und deren Bedienung bewirkte Beeinflussung des Reaktionsablaufes. Zuweilen ist es notwendig, die Ausbeutegleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{d}$$

noch durch einen von der Durchsatzhöhe unabhängigen Vektor $\mathfrak{a}_0$ zu erweitern und

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{d} - \mathfrak{a}_0\,t$$

zu schreiben, wo t die Zeit und $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{d}$ die Ausbeute bzw. den Durchsatz für diese Zeit bedeuten, während der Vektor $\mathfrak{a}_0$ die vom Durchsatz unabhängigen Ausbeuteverluste in der Zeiteinheit zum Ausdruck bringt. In solchen Fällen ist also ein gewisser Mindestbetrag für den Durchsatz erforderlich, damit die Apparatur überhaupt zum Fahren kommen kann, d. h. daß die Komponenten von $\mathfrak{a}$ positiv werden. Was die zahlenmäßige Ermittlung der Matrizenelemente anlangt, so sei hier nur kurz angedeutet, daß man dabei neben theoretischen Erwägungen ausgiebig von der Auswertung der Betriebsergebnisse auf statistischer Grundlage Gebrauch macht. (Näheres hierüber siehe Ziff. 5.)

Was nun die Umsatzmatrix der beiden Kompressionsstufen anlangt, so ist zu bedenken, daß sich bei der Kompression die Zusammensetzung des Gases nicht ändert. Man kann daher, wenn man die Verluste der Kompressionsstufe auf 30 at durch spezifische Ausbeuteziffern gemäß

$$0 < u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = u_4^2 = u_5^2 = u_2 \leq 1$$

zum Ausdruck bringt, die Umsatzmatrix der Kompression durch

$$\mathfrak{U}_2 = u_2\,\mathfrak{E} \tag{3}$$

als Skalarmatrix ($\mathfrak{E}$ bedeute die Einheitsmatrix) anschreiben. Entsprechend gilt für die Kompressionsstufe von 30 bis 300 at

$$\mathfrak{U}_4 = u_4\,\mathfrak{E}\,. \tag{4}$$

Für die Kohlensäureentfernung aus dem Konvertgas ist das Auswaschen mit Wasser die einfachste und großtechnisch am häufigsten angewandte Form. Der Kohlensäuregehalt des gewaschenen Gases beträgt 1—2%; bei dieser Wasserwäsche werden auch von den übrigen Komponenten gewisse, von ihrer Löslichkeit abhängige Anteile mit entfernt. Bezeichnet man den CO_2-Gehalt im gewaschenen Gas $\mathfrak{a}$ mit c bezogen auf das gewaschene Gas ohne CO_2 $\left(\text{also mit } \frac{c}{1+c} \text{ bezogen auf das gesamte Gas einschließlich } CO_2\right)$, führt man ferner für die Komponenten CO, H_2, N_2, CH_4 die spezifischen Ausbuteziffern u_2^3, u_3^3, u_4^3, u_5^3 ein, so läßt sich der Betriebsvorgang bei der Druckwasserwäsche mit praktisch hinreichender Genauigkeit durch die Umsatzmatrix

$$\mathfrak{U}_3 = \begin{vmatrix} 0 & cu_2^3 & cu_3^3 & cu_4^3 & cu_5^3 \\ 0 & u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

darstellen.

Bei der Entspannung des Waschwassers werden die gelöste Kohlensäure und ihre Begleitkomponenten wieder frei. Das so als „Nebenprodukt" anfallende Entspannungsgas kann unter Umständen für andere Zwecke (beispielsweise als Schutzgas) Verwendung finden. Es soll hier als „Fertiggas"

$$\mathfrak{f}_3 = \begin{vmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_4^3 \\ f_5^3 \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden, um zum Ausdruck zu bringen, daß es in das betrachtete System nicht mehr eingesetzt wird, von ihm aus also als Fertigprodukt anzusehen ist. Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{f}_3$ und $\mathfrak{d}_3$ kann durch

$$\mathfrak{f}_3 = \begin{vmatrix} v_1^3 & -cu_2^3 & -cu_3^3 & -cu_4^3 & -cu_5^3 \\ 0 & v_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^3 \end{vmatrix} \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{d}_3 \tag{5a}$$

dargestellt werden, wo $0 < u_i^3 + v_i^3 \leq 1$ ist (mit $u_1^3 = 0$).

Nach der Kompression des Gases auf 300 at ($\mathfrak{U}_4 = u_4\,\mathfrak{E}$) erfolgt in der Kupferwäsche die Entfernung des Kohlenoxyds durch Waschen mit ammoniakalischer Kupfersalzlösung, die durch Entspannen und Entgasen wieder regeneriert wird, wobei die hierbei frei gewordenen Gase („CO-Rückgas") wieder in die Konvertierung zurückgeführt werden, soweit sie nicht anderweitig Verwendung finden. Auch in diesem Fall werden zur Darstellung des Betriebsvorganges zwei Matrizen benötigt, nämlich eine, welche den Ausbeutevektor $\mathfrak{f}_5$ des Frischgases gemäß

$$\mathfrak{f}_5 = \mathfrak{V}_5\,\mathfrak{d}_5$$

und eine, welche den Ausbeutevektor $\mathfrak{a}_5$ des CO-Rückgases gemäß

$$\mathfrak{a}_5 = \mathfrak{U}_5\,\mathfrak{d}_5$$

in Abhängigkeit vom Durchsatz $\mathfrak{d}_5$ zum Ausdruck bringt. (Die Wahl der Bezeichnungen ist mit Rücksicht darauf erfolgt, daß das CO-Rückgas u. U. in das System wieder eingesetzt werden kann, ein Fall, der Ziff. 3b behandelt ist). Beide Matrizen lassen sich mit praktisch hinreichender Genauigkeit als Diagonalmatrizen gemäß

$$\mathfrak{V}_5 = \begin{vmatrix} v_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}_5 = \begin{vmatrix} u_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 \end{vmatrix} \tag{6}$$

darstellen. Man kann, was gelegentlich zweckmäßig ist, auch beide Matrizen zusammenfassen und schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_5 \\ \mathfrak{f}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_5 \\ \mathfrak{V}_5 \end{pmatrix} \mathfrak{d}_5$$

3. Kopplung von Betrieben. Im vorhergehenden Abschnitt ist gezeigt worden, wie sich Betriebsvorgänge in der chemischen Industrie durch Matrizen darstellen lassen. Diese Darstellungsmöglichkeit allein würde jedoch die Anwendung des Matrizenkalküls wohl kaum rechtfertigen. Seine Brauchbarkeit zeigt sich in vollem Umfang erst bei der Kopplung von einzelnen Betrieben, die in folgendem für verschiedene Fälle betrachtet werden soll.

3a. Die unverzweigte Betriebskette. Betrachtet man zunächst eine Folge von hintereinandergeschalteten Teilbetrieben, eine „unverzweigte Betriebskette", so kann man aus den Umsatzmatrizen der Teilbetriebe sehr leicht auf die Umsatzmatrix der ganzen Betriebskette schließen. Aus Abb. 2 für eine aus drei Teilbetrieben bestehende Kette liest man ohne weiteres ab:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{U}_1 \mathfrak{d}_1 , \\ \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{U}_2 \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{U}_2 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_1 \mathfrak{d}_1 , \\ \mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{U}_3 \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{U}_3 \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{U}_3 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_1 \mathfrak{d}_1 . \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

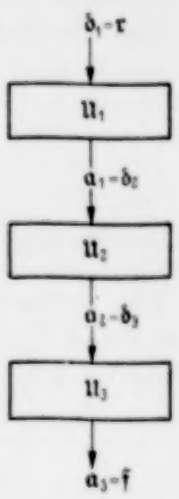


Abb. 2. Unverzweigte Betriebskette.

Bezeichnet man den Durchsatzvektor $\mathfrak{d}_1$ des ersten Betriebes mit $\mathfrak{r}$ („Rohproduktvektor"), den Ausbeutevektor $\mathfrak{a}_3$ des letzten Betriebs mit $\mathfrak{f}$ („Fertigproduktvektor") und führt die Abkürzung

$$\mathfrak{U}_{31} = \mathfrak{U}_3 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_1 \qquad (8)$$

ein, so erhält man

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{U}_{31} \mathfrak{r} . \qquad (9)$$

Man erkennt aus den Gleichungen (7) bzw. (8), daß der Hintereinanderschaltung der Teilbetriebe mathematisch die Multiplikation ihrer Umsatzmatrizen entspricht. Nun ist bei der Matrizenmultiplikation die Reihenfolge der Faktoren im allgemeinen nicht vertauschbar. Dieser dem Nichtmathematiker zuweilen schwer vorstellbare Satz bedeutet aber technologisch, daß die Reihenfolge der in den einzelnen Teilbetrieben stattfindenden technologischen Prozesse im allgemeinen nicht vertauscht werden darf. Dies ist aber ohne weiteres klar. Umgekehrt läßt sich aus der Nichtvertauschbarkeit technologischer Prozesse schließen, daß zur rationellen mathematischen Darstellung solcher verkoppelten Prozesse ein Kalkül mit nichtvertauschbaren Verknüpfungen Anwendung finden muß. Der Matrizenkalkül erscheint also geradezu prädestiniert für solche Aufgaben, zumal durch die Verwendung mehrdimensionaler Vektoren beliebig viele Einflußgrößen berücksichtigt werden können.

Die Verallgemeinerung der Gleichungen (8) und (9) liegt auf der Hand; dabei möge auch gleich der Fall mit einbezogen werden, daß in jedem Betrieb ein Fertigprodukt $\mathfrak{f}_i$ anfalle, dessen Durchsatzabhängigkeit durch

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{V}_i \mathfrak{d}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

dargestellt sei, während die an die nachfolgenden Betriebe weitergeleiteten Ausbeuten $\mathfrak{a}_i$ wieder durch

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i \mathfrak{d}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

gegeben seien. Unter Berücksichtigung, daß

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots m)$$

ist, folgt dann mit $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}_1$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_i &= \mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_{i-1} \cdots \cdots \mathfrak{U}_1 \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{U}_{i1} \mathfrak{r}_1 , \\ \mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} &= \mathfrak{U}_{i-1,1} \mathfrak{r}_1 , \\ \mathfrak{f}_i = \mathfrak{V}_i \mathfrak{d}_i &= \mathfrak{V}_i \mathfrak{U}_{i-1,1} \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{V}_{i1} \mathfrak{r}_1 , \\ \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{V}_1 \mathfrak{d}_1 &= \mathfrak{V}_{11} \mathfrak{r}_1 \end{aligned}\right| \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2. \cdots m) \\ (i = 2, 3, \cdots m) \end{matrix} \qquad (10)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\mathfrak{d} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{d}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{U}_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{U}_{m-1,1} \end{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{11} \\ \mathfrak{U}_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{U}_{m1} \end{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{f}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{V}_{11} \\ \mathfrak{V}_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{V}_{m1} \end{pmatrix} \mathfrak{r}_1 .$$

Es kann nun vorkommen, daß nicht nur dem Betrieb 1 ein Rohprodukt $\mathfrak{r}_1$ zugeführt wird, sondern daß auch den Betrieben k $(k > 1)$ neben der Ausbeute $\mathfrak{a}_{k-1}$ ein von außerhalb des Systems kommendes Rohprodukt $\mathfrak{r}_k$ zur Weiterverarbeitung zugeleitet wird. Es gelten dann folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_i \mathfrak{d}_i & (i = 1, 2, \cdots m), & \text{(Umsatzgleichungen)} \\ \mathfrak{f}_i = \mathfrak{V}_i \mathfrak{d}_i & (i = 1, 2, \cdots m), & \\ \mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i & (i = 2, 3, \cdots m), & \text{(Kopplungsgleichungen)} \\ \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}_1 . & & \end{array}\right\} \tag{11}$$

Die Lösung läßt sich unmittelbar anschreiben, wenn man berücksichtigt, daß wegen

$$\mathfrak{U}_i \mathfrak{d}_i = \mathfrak{U}_i(\mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i) = \mathfrak{U}_i \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{U}_i \mathfrak{r}_i , \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{V}_i \mathfrak{d}_i = \mathfrak{V}_i \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{V}_i \mathfrak{r}_i$$

die aus $\mathfrak{r}_k (k > 1)$ stammenden Ausbeuten und Fertigprodukte einfach superponiert werden können. Für den Einsatz von $\mathfrak{r}_k$ allein folgt aber analog wie für $\mathfrak{r}_1$:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{d}_k = \mathfrak{r}_k , & & \\ \mathfrak{d}_i = \mathfrak{U}_{i-1,k} \mathfrak{r}_k & (k < i \leq m), & \\ \mathfrak{a}_i = \mathfrak{U}_{ik} \mathfrak{r}_k & (k \leq i \leq m), & \\ \mathfrak{f}_i = \mathfrak{V}_{ik} \mathfrak{r}_k & (k \leq i \leq m), & \end{array}$$

wo

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{U}_{ik} = \mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_{i-1} \cdots \mathfrak{U}_k & (k \leq i \leq m) \ (\mathfrak{U}_{kk} = \mathfrak{U}_k), & \\ \mathfrak{V}_{ik} = \mathfrak{V}_i \mathfrak{U}_{i-1,k} & (k < i \leq m) \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_{kk} = \mathfrak{V}_k & \end{array}$$

gesetzt ist. Setzt man noch fest, daß $\mathfrak{U}_{ik}$ für $i < k$ gleich Null (d. h. gleich einer n-reihigen, quadratischen Nullmatrix) sein soll, so läßt sich schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{d} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{d}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{d}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 & \cdot & 0 \\ \mathfrak{U}_{11} & \mathfrak{E} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \mathfrak{U}_{m-1,1} & \mathfrak{U}_{m-1,2} & \cdot & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_m \end{pmatrix} = (\delta_{ik}\, \mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{i-1,k})\, \mathfrak{r} \ \text{ mit } \ \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (\delta_{ik} = 1 \\ \text{für } i = k, \\ \delta_{ik} = 0 \\ \text{für } i \neq k), \end{array} \\ \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ \mathfrak{U}_{21} & \mathfrak{U}_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \mathfrak{U}_{m1} & \mathfrak{U}_{m2} & \cdot & \mathfrak{U}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_m \end{pmatrix} = (\mathfrak{U}_{ik})\, \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{f}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{V}_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ \mathfrak{V}_{21} & \mathfrak{V}_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \mathfrak{V}_{m1} & \mathfrak{V}_{m2} & \cdot & \mathfrak{V}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \mathfrak{r}_2 \\ \cdot \\ \mathfrak{r}_m \end{pmatrix} = (\mathfrak{V}_{ik})\, \mathfrak{r}. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Man kann diese Gleichungen noch in eine einzige zusammenfassen, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ik}\, \mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{i-1,k} \\ \mathfrak{U}_{ik} \\ \mathfrak{V}_{ik} \end{pmatrix} \mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\, \mathfrak{r} \qquad \begin{array}{l} (\mathfrak{U}_{ik} = \mathfrak{V}_{ik} = 0 \text{ für } i < k) \\ (\delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k \\ \qquad = 0 \ \ ,, \ \ i \neq k) \\ (i, k = 1, 2, \cdots m) \end{array} \end{array}\right\} \tag{12a}$$

setzt, und hat dann den „Betriebsablauf" $\mathfrak{l}$ als Folgeerscheinung des Rohprodukteinsatzes $\mathfrak{r}$ in einer einzigen Matrix zum Ausdruck gebracht. Die praktische Bedeutung der Darstellungen (12) bzw. (12a) liegt darin, daß sie es ohne Umweg über sämtliche Zwischenstufen ermöglichen, sofort die Wirkung der Änderung einer Rohproduktkomponente auf eine be-

liebige Komponente von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{f}$ angeben zu können, eine Forderung, die sehr häufig an die Betriebsleitung herantritt.

Wendet man die Gleichungen (12) auf die unverzweigte Betriebskette der Wasserstofferzeugung von der Konvertierung bis zur Kupferwäsche an und zwar unter der Annahme, daß das CO-Rückgas nicht in die Konvertierung zurückgeführt wird, so erhält man unter Benutzung der Gleichungen (2) bis (6) für $\begin{pmatrix}\mathfrak{U}_{ik}\\ \mathfrak{V}_{ik}\end{pmatrix}$ die in Tabelle 1 zusammengestellte Matrix. Wenn sich auch in diesem Sonderfall diese Matrix auf einfache Weise in allgemeiner Form darstellen läßt, so empfiehlt es sich doch bei praktischen Anwendungen, die zahlenmäßige Darstellung von $\mathfrak{Q}$ unmittelbar aus der zahlenmäßigen Darstellung von $\mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{V}_i$ zu berechnen. Ein Beispiel für eine solche Darstellung gibt Tabelle 2, bei der jedoch die Kompression auf 30 at mit der Druckwasserwäsche und die Kompression von 30 auf 300 at mit der Kupferwäsche zusammengefaßt sind. Da die Umsatzmatrizen für die Kompressionsstufen mit sehr guter Annäherung durch Einheitsmatrizen darstellbar sind, bleibt das typische Bild bei dieser Darstellung erhalten.

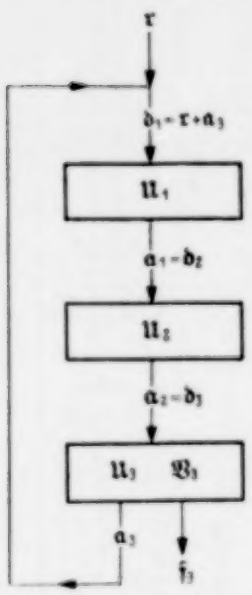


Abb. 3. Betriebskette mit Rückführung.

3b. Die Betriebskette mit Rückführung. Es wurde bereits (Ziff. 2) darauf hingewiesen, daß das in der Kupferwäsche anfallende CO-Rückgas, soweit es nicht anderweitig Verwendung findet, wieder in die Konvertierung zurückgeführt wird. Solche Fälle der „Rückführung" sind besonders für die chemische Industrie typisch.

In der Abb. 3 ist eine solche „Betriebskette mit Rückführung" für den Fall gezeichnet, daß die Ausbeute $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{d}_3$ des dritten Teilbetriebes in den ersten zurückgeführt wird; das Fertigprodukt $\mathfrak{f}_3$ sei durch

$$\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{d}_3$$

gegeben. Man erhält zunächst wieder wie bei der geraden Betriebskette

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{U}_{31}\,\mathfrak{d}_1\,.$$

Nun gilt weiter:

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{r} + \mathfrak{U}_{31}\,\mathfrak{d}_1$$

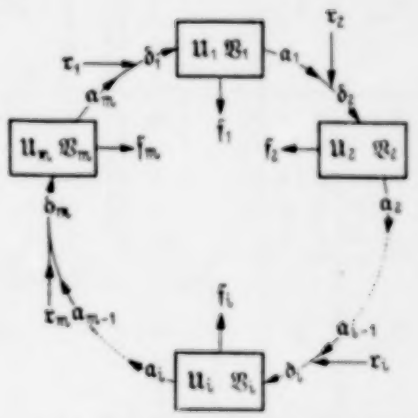


Abb. 4. Zyklische Auffassung der Betriebskette mit Rückführung.

oder mit der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$:

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}\,.$$

Daraus folgt unter der Voraussetzung, daß $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})$ nicht singulär ist,

$$\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r}\,.$$

Für das Fertigprodukt $\mathfrak{f}_3$ folgt nun

$$\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{U}_{21}\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{U}_{21}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r}$$

oder schließlich mit $\mathfrak{V}_{31} = \mathfrak{V}_3\,\mathfrak{U}_{21}$

$$\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{V}_{31}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{31})^{-1}\,\mathfrak{r}\,.$$

Auch bei der Betriebskette mit Rückführung liegt die Verallgemeinerung auf m Teilbetriebe auf der Hand. An Stelle der Bedingungsgleichungen (11) (Ziff. 3a) treten jetzt unter zyklischer Auffassung der Folge $1, 2 \cdots m$ (Abb. 4) folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\mathfrak{a}_i &= \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{d}_i\,,\\ \mathfrak{f}_i &= \mathfrak{V}_i\,\mathfrak{d}_i\,,\end{aligned}\right\}\ \text{(Umsatzgleichungen)}\\ &\mathfrak{d}_i = \mathfrak{a}_{i-1} + \mathfrak{r}_i\,,\quad \text{(Kopplungsgleichungen)}\\ &\qquad (\mathfrak{a}_{1-1} = \mathfrak{a}_m)\quad (i = 1, 2, \cdots m)\,.\end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Die Auflösung nach $\mathfrak{d}_i$, $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{f}_i$ erfolgt genau so, wie oben für $m = 3$ gezeigt wurde, und man erhält wieder unter Benutzung der Abkürzungen $\mathfrak{U}_{ik}$ und $\mathfrak{V}_{ik}$ (Ziff. 3a), zunächst für den Fall, daß nur an der Stelle 1 ein Rohprodukt $\mathfrak{r}_1$ eingesetzt wird (also $\mathfrak{r}_i = 0$ für $i > 1$), und

Tabelle 1. ***Matrix*** $\begin{pmatrix}\mathfrak{U}_{ik}\\ \mathfrak{V}_{ik}\end{pmatrix}$ ***für eine unverzweigte***

	i \ k	$\mathfrak{U}_{i1}$ bez. $\mathfrak{V}_{i1}$ — 1				
$\mathfrak{U}_{1k}$	1	$\begin{pmatrix} u_1^1 & 1-u_2^1 & -u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_2^1 & u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_3^1 & u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{U}_{2k}$	2	$u_2\begin{pmatrix} 0 & 1-u_2^1 & -u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_2^1 & u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_3^1 & u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{U}_{3k}$	3	$u_2\begin{pmatrix} 0 & c(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & c(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & cu_4^3 u_4^1 & cu_5^3 u_5^1\\ 0 & u_2^3 u_2^1 & u_2^3 u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_3^3 u_3^1 & u_3^3 u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{U}_{4k}$	4	$u_4 u_2\begin{pmatrix} 0 & c(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & c(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & cu_4^3 u_4^1 & cu_5^3 u_5^1\\ 0 & u_2^3 u_2^1 & u_2^3 u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_3^3 u_3^1 & u_3^3 u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{U}_{5k}$	5	$u_4 u_2\begin{pmatrix} 0 & c u_1^5(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & c u_1^5(u_2^3 u_2^1 + u_3^3 u_3^1) & c u_1^5 u_4^3 u_4^1 & c u_1^5 u_5^3 u_5^1\\ 0 & u_2^5 u_2^3 u_2^1 & u_2^5 u_2^3 u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & u_3^5 u_3^3 u_3^1 & u_3^5 u_3^3 u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 u_4^3 u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 u_5^3 u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{V}_{3k}$	3	$u_2\begin{pmatrix} v_1^3 u_1^1 & v_1^3(1-u_2^1)-c(u_2^3 u_2^1+u_3^3 u_3^1) & -v_1^3 u_2^1-c(u_2^3 u_2^1+u_3^3 u_3^1) & -c u_4^3 u_4^1 & -c u_5^3 u_5^1\\ 0 & v_2^3 u_2^1 & v_2^3 u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & v_3^3 u_3^1 & v_3^3 u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & v_4^3 u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^3 u_5^1 \end{pmatrix}$				
$\mathfrak{V}_{5k}$	5	$u_4 u_2\begin{pmatrix} 0 & c v_1^5(u_2^3 u_2^1+u_3^3 u_3^1) & c v_1^5(u_2^3 u_2^1+u_3^3 u_3^1) & c v_1^5 u_4^3 u_4^1 & c v_1^5 u_5^3 u_5^1\\ 0 & v_2^5 u_2^3 u_2^1 & v_2^5 u_2^3 u_2^1 & 0 & 0\\ 0 & v_3^5 u_3^3 u_3^1 & v_3^5 u_3^3 u_3^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 u_4^3 u_4^1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 u_5^3 u_5^1 \end{pmatrix}$				

unter der Voraussetzung, daß $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ **nicht singulär ist:**

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,, \\ \mathfrak{d}_i &= \mathfrak{U}_{i-1,1}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,, \qquad (i = 2, 3, \cdots m) \\ \mathfrak{a}_i &= \mathfrak{U}_{i1}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,, \\ \mathfrak{f}_i &= \mathfrak{V}_{i1}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

Durch Einsetzen dieser Lösung in (11a) wird leicht ihre Richtigkeit bestätigt; dabei ist, um

$$\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a}_m + \mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{U}_{m1}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1} + \mathfrak{E}]\,\mathfrak{r}_1$$

nachzuweisen, die Identität

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = \mathfrak{U}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} + \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{E} \qquad (13)$$

zu beachten, die aus

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{U} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{U})$$

folgt, wenn man beide Seiten, von rechts bzw. von links mit $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1}$ **multipliziert.**

Wird an der Stelle k **das Rohprodukt** $\mathfrak{r}_k$ **eingesetzt, so erhält man bei dem zyklischen Charakter der Betriebskette mit Rückführung die Lösungen ganz einfach dadurch, daß man**

Betriebskette mit $m = 5$ Gliedern

$\mathfrak{U}_{i2}$ bzw. $\mathfrak{V}_{i2}$	$\mathfrak{U}_{i3}$ bzw. $\mathfrak{V}_{i3}$	$\mathfrak{U}_{i4}$ bez. $\mathfrak{V}_{i4}$	$\mathfrak{U}_{i5}$ bzw. $\mathfrak{V}_{i5}$
2	3	4	5

$$u_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 \begin{pmatrix} 0 & c u_2^3 & c u_3^3 & c u_4^3 & c u_5^3 \\ 0 & u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & c u_2^3 & c u_3^3 & c u_4^3 & c u_5^3 \\ 0 & u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 \end{pmatrix}$$

$$u_4\,u_2 \begin{pmatrix} 0 & c u_2^3 & c u_3^3 & c u_4^3 & c u_5^3 \\ 0 & u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} 0 & c u_2^3 & c u_3^3 & c u_4^3 & c u_5^3 \\ 0 & u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4\,u_2 \begin{pmatrix} 0 & c u_1^5 u_2^3 & c u_1^5 u_3^3 & c u_1^5 u_4^3 & c u_1^5 u_5^3 \\ 0 & u_2^5 u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^5 u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} 0 & c u_1^5 u_2^3 & c u_1^5 u_3^3 & c u_1^5 u_4^3 & c u_1^5 u_5^3 \\ 0 & u_2^5 u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^5 u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} u_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_5^5 \end{pmatrix}$$

$$u_2 \begin{pmatrix} v_1^3 & -c u_2^3 & -c u_3^3 & -c u_4^3 & -c u_5^3 \\ 0 & v_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1^3 & -c u_2^3 & -c u_3^3 & -c u_4^3 & -c u_5^3 \\ 0 & v_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^3 \end{pmatrix}$$

$$u_4\,u_2 \begin{pmatrix} 0 & c v_1^5 u_2^3 & c v_1^5 u_3^3 & c v_1^5 u_4^3 & c v_1^5 u_5^3 \\ 0 & v_2^5 u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^5 u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} 0 & c v_1^5 u_2^3 & c v_1^5 u_3^3 & c v_1^5 u_4^3 & c v_1^5 u_5^3 \\ 0 & c_2^5 u_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^5 u_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 u_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 u_5^3 \end{pmatrix} \qquad u_4 \begin{pmatrix} v_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5^5 \end{pmatrix}$$

den Zeiger 1 mit dem Zeiger k vertauscht. Die Matrizen $\mathfrak{U}_{ik}$ und $\mathfrak{V}_{ik}$, die gemäß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_{ik} &= \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{U}_{i-1} \cdots \mathfrak{U}_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m), \\ \mathfrak{V}_{ik} &= \mathfrak{V}_i\,\mathfrak{U}_{i-1} \qquad (i \neq k), \\ \mathfrak{V}_{kk} &= \mathfrak{V}_k \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

definiert sind, sind nun ebenfalls zyklisch aufzufassen, d. h. es ist $\mathfrak{U}_{1-1} = \mathfrak{U}_m$ zu setzen. Im Gegensatz zur geraden Betriebskette (s. Ziff. 3a) sind nunmehr $\mathfrak{U}_{ik}$ und $\mathfrak{V}_{ik}$ auch für $i < k$ definiert. Führt man weiter noch die Abkürzung

$$\bar{\mathfrak{U}}_{kk} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{k-1,\,k})^{-1} \tag{14a}$$

ein, so erhält man für den Rohprodukteinsatz an der Stelle k die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_k &= \bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,\mathfrak{r}_k = (\mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{k-1,k}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk})\,\mathfrak{r}_k, \\ \mathfrak{d}_i &= \mathfrak{U}_{i-1,\,k}\,\mathfrak{U}_{kk}\,\mathfrak{r}_k \qquad (i \neq k), \\ \mathfrak{a}_i &= \mathfrak{U}_{ik}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,\mathfrak{r}_k, \\ \mathfrak{f}_k &= \mathfrak{V}_{ik}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,\mathfrak{r}_k. \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2, \cdots m)$$

Hier ist wieder die Identität (13) zu beachten, aus der

$$\bar{\mathfrak{U}}_{kk} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{k-1,\,k})^{-1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{k-1,\,k}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{k-1,\,k})^{-1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{k-1,\,k}\,\bar{\mathfrak{U}}_{kk} = \mathfrak{E} + \bar{\mathfrak{U}}_{kk}\,\mathfrak{U}_{k\ 1,\,k} \tag{13a}$$

folgt. Durch Superposition erhält man schließlich für den allgemeinen Fall, bei dem an jeder Stelle Rohprodukte eingesetzt werden,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{d} = \begin{pmatrix}\mathfrak{d}_1\\ \mathfrak{d}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{d}_m\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{m2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{mm}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{1m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \mathfrak{U}_{m-1,1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{m-1,2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \overline{\mathfrak{U}}_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{r}_k\end{pmatrix} = (\delta_{ik}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk})\,\mathfrak{r}\,,\\
&\qquad (\mathfrak{E} = n\text{-reihige Einheitsmatrix})\\
&\qquad (\delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k\\
&\qquad\qquad = 0 \;\;,, \;\; i \neq k)\\
\mathfrak{a} = \begin{pmatrix}\mathfrak{a}_1\\ \mathfrak{a}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{a}_m\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{12}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{1m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \mathfrak{U}_{21}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{22}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{2m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \mathfrak{U}_{m1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{U}_{m2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{U}_{mm}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{r}_k\end{pmatrix} = (\mathfrak{U}_{ik}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk})\,\mathfrak{r}\,,\\
\mathfrak{f} = \begin{pmatrix}\mathfrak{f}_1\\ \mathfrak{f}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{f}_m\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{V}_{11}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{V}_{12}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{V}_{1m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \mathfrak{V}_{21}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{V}_{22}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{V}_{2m}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \mathfrak{V}_{m1}\,\overline{\mathfrak{U}}_{11} & \mathfrak{V}_{m2}\,\overline{\mathfrak{U}}_{22} & \cdot & \mathfrak{V}_{mm}\,\overline{\mathfrak{U}}_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\\ \cdot\\ \mathfrak{r}_k\end{pmatrix} = (\mathfrak{V}_{ik}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk})\,\mathfrak{r}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Auch hier läßt sich, wie oben, zusammenfassend schreiben

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix}\mathfrak{d}\\ \mathfrak{a}\\ \mathfrak{f}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_{ik}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{U}_{i-1,k}\,\overline{\mathfrak{U}}_{kk}\\ \mathfrak{U}_{ik}\;\;\overline{\mathfrak{U}}_{kk}\\ \mathfrak{V}_{ik}\;\;\overline{\mathfrak{U}}_{kk}\end{pmatrix}\mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}\,. \tag{15a}$$

Tabelle 3 zeigt ein Zahlenbeispiel für eine Betriebskette mit Rückführung, dem dieselben Umsatzmatrizen der Teilbetriebe wie in Tabelle 2 zugrunde gelegt sind.

Der mathematischen Voraussetzung, daß $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ nicht singulär ist, einer Voraussetzung, zu der noch die Bedingung hinzukommt, daß die Komponenten von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}$ nicht negativ werden dürfen, solange es die von $\mathfrak{r}$ nicht sind, entsprechen technologische Bedingungen für die Durchführung des Verfahrens mit Rückführung. Es gibt Fälle, wo diese Voraussetzung durch besondere Maßnahmen erzwungen werden muß. Man kann die in solchen Fällen auftretenden Verhältnisse leicht überblicken, wenn die Matrix $\mathfrak{U}_{m1}$ eine Diagonalmatrix ist. Bezeichnet man die i-ten Komponenten von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}_m$ mit r_i, $d_i^{(1)}$ und $a_i^{(m)}$, so gelte also etwa

$$a_i^{(m)} = u_i\,d_i^{(1)}\,.$$

Ist nun $u_i \geq 1$, so heißt dies, daß die zurückkommende Menge $a_i^{(m)}$ größer als die eingesetzte Menge $d_i^{(1)}$ oder mindestens ihr gleich ist. Es ist also keine Abnahme von $d_i^{(1)}$ erfolgt und es leuchtet ein, daß unter solchen Umständen ein stationärer Kreislauf unmöglich ist. Die Gleichung

$$\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})^{-1}\,\mathfrak{r}$$

lautet in diesem Fall für die i-te Komponente

$$d_i^{(1)} = \frac{r_i}{1 - u_i}\,;$$

$d_i^{(1)}$ wird also für $u_i \geq 1$ und $r_i > 0$ entweder unendlich und $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ singulär, oder es wird negativ und es entspricht $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ ebenfalls nicht den Bedingungen, die oben als notwendig bezeichnet wurden.

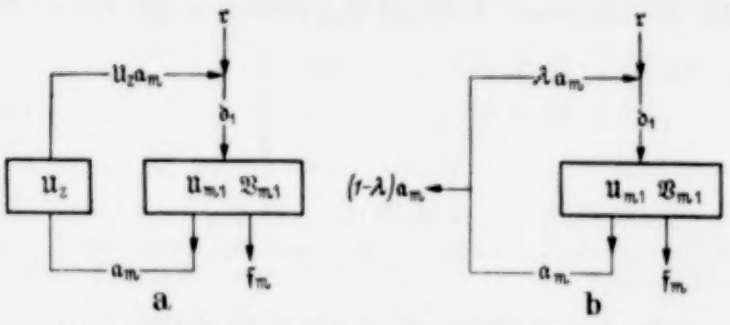


Abb. 5. Maßnahmen bei einer singulären Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$.
a) Einschalten einer zusätzlichen Betriebsstufe.
b) Zwischenproduktentnahme.

In solchen Fällen geht man z. B. in der chemischen Technik so vor, daß man entweder eine zusätzliche Betriebsstufe mit der Umsatzmatrix $\mathfrak{U}_z$ einschaltet (s. Abb. 5a, wo die Betriebskette durch ein einziges Kästchen dargestellt ist) und dadurch an Stelle der Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ die Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_z\,\mathfrak{U}_{m1})$ tritt, oder man führt einen Teil der Ausbeute $\mathfrak{a}_m$ aus dem System ab (Zwischenproduktentnahme, s. Abb. 5b). In diesem Fall tritt an die Stelle der Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_{m1})$ die Matrix $(\mathfrak{E} - \lambda\,\mathfrak{U}_{m1})$, wo $0 \leq \lambda < 1$ ist.

Tabelle 2. ***Unverzweigte Betriebskette mit drei Betrieben.***

		Einsatz in Konvertierung τ_1					Einsatz in Druckwasserwäsche τ_2					Einsatz in Kupferwäsche τ_3				
		CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4	CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4	CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4
Durchsatz durch Konvertierung	CO_2	1	0	0	0	0										
	CO	0	1	0	0	0										
$\mathfrak{d}_1$	H_2	0	0	1	0	0										
	N_2	0	0	0	1	0										
	CH_4	0	0	0	0	1										
Durchsatz d. Druckwasserwäsche	CO_2	1	0,95	—0,05	0	0	1	0	0	0	0					
	CO	0	0,05	0,05	0	0	0	1	0	0	0					
$\mathfrak{d}_2$	H_2	0	0,95	0,95	0	0	0	0	1	0	0					
	N_2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0					
	CH_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1					
Durchsatz durch Kupferwäsche	CO_2	0	0,0194	0,0194	0,0194	0,0180	0	0,0194	0,0194	0,0194	0,0180	1	0	0	0	0
	CO	0	0,0485	0,0485	0	0	0	0,97	0	0	0	0	1	0	0	0
$\mathfrak{d}_3$	H_2	0	0,9215	0,9215	0	0	0	0	0,97	0	0	0	0	1	0	0
	N_2	0	0	0	0,97	0	0	0	0	0,97	0	0	0	0	1	0
	CH_4	0	0	0	0	0,90	0	0	0	0	0,90	0	0	0	0	1
Ausbeute in Konvertierung	CO_2	1	0,95	—0,05	0	0										
	CO	0	0,05	0,05	0	0										
a_1	H_2	0	0,95	0,95	0	0										
	N_2	0	0	0	1	0										
	CH_4	0	0	0	0	1										
Ausbeute in Druckwasserwäsche	CO_2	0	0,0194	0,0194	0,0194	0,0180	0	0,0194	0,0194	0,0194	0,0180					
	CO	0	0,0485	0,0485	0	0	0	0,97	0	0	0					
a_2	H_2	0	0,9215	0,9215	0	0	0	0	0,97	0	0					
	N_2	0	0	0	0,97	0	0	0	0	0,97	0					
	CH_4	0	0	0	0	0,90	0	0	0	0	0,90					
Ausbeute in Kupferwäsche	CO_2	0	0,0190	0,0190	0,0190	0,0176	0	0,0190	0,0190	0,0190	0,0176	0,98	0	0	0	0
	CO	0	0,0475	0,0475	0	0	0	0,9506	0	0	0	0	0,98	0	0	0
a_3	H_2	0	0,0184	0,0184	0	0	0	0	0,0194	0	0	0	0	0,02	0	0
	N_2	0	0	0	0,0194	0	0	0	0	0,0194	0	0	0	0	0,02	0
	CH_4	0	0	0	0	0,0630	0	0	0	0	0,0630	0	0	0	0	0,07
Ausgewaschene Kohlensäure	CO_2	0,80	0,7406	—0,0594	—0,0194	—0,0180	0,80	—0,0194	—0,0194	—0,0194	—0,0180					
	CO	0	0,0015	0,0015	0	0	0	0,03	0	0	0					
f_2	H_2	0	0,0285	0,0285	0	0	0	0	0,03	0	0					
	N_2	0	0	0	0,03	0	0	0	0	0,03	0					
	CH_4	0	0	0	0	0,10	0	0	0	0	0,10					
Frischgas	CO_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	CO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_3	H_2	0	0,8939	0,8939	0	0	0	0	0,9409	0	0	0	0	0,97	0	0
	N_2	0	0	0	0,9409	0	0	0	0	0,9409	0	0	0	0	0,97	0
	CH_4	0	0	0	0	0,8280	0	0	0	0	0,8280	0	0	0	0	0,92

Tabelle 3. *Betriebskette mit drei Betrieben mit Rückführung.*

		Einsatz in Konvertierung r_1					Einsatz in Druckwasserwäsche r_2					Einsatz in Kupferwäsche r_3				
		CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4	CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4	CO_2	CO	H_2	N_2	CH_4
Durchsatz durch Konvertierung	CO_2	1	0,0203	0,0203	0,0194	0,0188	0	0,0383	0,0194	0,0194	0,0188	0,98	0,0199	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	1,0509	0,0509	0	0	0	0,9990	0,0010	0	0	0	1,0299	0,0010	0	0
$\mathfrak{d}_1$	H_2	0	0,0197	1,0197	0	0	0	0,0188	0,0198	0	0	0	0,0193	0,0204	0	0
	N_2	0	0	0	1,0198	0	0	0	0	0,0198	0	0	0	0	0,0204	0
	CH_4	0	0	0	0	1,0672	0	0	0	0	0,0672	0	0	0	0	0,0747
Durchsatz d. Druckwasserwäsche	CO_2	1	1,0177	0,0177	0,0194	0,0188	1	0,9864	0,0194	0,0194	0,0188	0,98	0,9973	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	0,0535	0,0535	0	0	0	1,0509	0,0010	0	0	0	0,0525	0,0011	0	0
$\mathfrak{d}_2$	H_2	0	1,0171	1,0171	0	0	0	0,9668	1,0197	0	0	0	0,9967	0,0203	0	0
	N_2	0	0	0	1,0198	0	0	0	0	1,0198	0	0	0	0	0,0204	0
	CH_4	0	0	0	0	1,0672	0	0	0	0	1,0672	0	0	0	0	0,0747
Durchsatz durch Kupferwäsche	CO_2	0	0,0208	0,0208	0,0198	0,0192	0	0,0391	0,0198	0,0198	0,0192	1	0,0204	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	0,0519	0,0519	0	0	0	1,0194	0,0010	0	0	0	1,0509	0,0010	0	0
$\mathfrak{d}_3$	H_2	0	0,9866	0,9866	0	0	0	0,9378	0,9891	0	0	0	0,9668	1,0197	0	0
	N_2	0	0	0	0,9892	0	0	0	0	0,9892	0	0	0	0	1,0198	0
	CH_4	0	0	0	0	0,9605	0	0	0	0	0,9605	0	0	0	0	1,0672
Ausbeute in Konvertierung	CO_2	1	1,0177	0,0177	0,0194	0,0188	0	0,9864	0,0194	0,0194	0,0188	0,98	0,9973	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	0,0535	0,0535	0	0	0	0,0509	0,0010	0	0	0	0,0525	0,0011	0	0
a_1	H_2	0	1,0171	1,0171	0	0	0	0,9668	0,0197	0	0	0	0,9967	0,0203	0	0
	N_2	0	0	0	1,0198	0	0	0	0	0,0198	0	0	0	0	0,0204	0
	CH_4	0	0	0	0	1,0672	0	0	0	0	0,0672	0	0	0	0	0,0747
Ausbeute in Druckwasserwäsche	CO_2	0	0,0208	0,0208	0,0198	0,0192	0	0,0391	0,0198	0,0198	0,0192	0	0,0204	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	0,0519	0,0519	0	0	0	1,0194	0,0010	0	0	0	0,0509	0,0010	0	0
a_2	H_2	0	0,9866	0,9866	0	0	0	0,9378	0,9891	0	0	0	0,9668	0,0197	0	0
	N_2	0	0	0	0,9892	0	0	0	0	0,9892	0	0	0	0	0,0198	0
	CH_4	0	0	0	0	0,9605	0	0	0	0	0,9605	0	0	0	0	0,0672
Ausbeute in Kupferwäsche	CO_2	0	0,0203	0,0203	0,0194	0,0188	0	0,0383	0,0194	0,0194	0,0188	0,98	0,0199	0,0004	0,0004	0,0013
	CO	0	0,0509	0,0509	0	0	0	0,9990	0,0010	0	0	0	1,0299	0,0010	0	0
a_3	H_2	0	0,0197	0,0197	0	0	0	0,0188	0,0198	0	0	0	0,0193	0,0204	0	0
	N_2	0	0	0	0,0198	0	0	0	0	0,0198	0	0	0	0	0,0204	0
	CH_4	0	0	0	0	0,0672	0	0	0	0	0,0672	0	0	0	0	0,0747
Ausgewaschene Kohlensäure	CO_2	0,80	0,7934	—0,0066	—0,0043	—0,0042	0,80	0,7500	—0,0043	—0,0043	—0,0042	0,7840	0,8775	—0,0001	—0,0001	—0,0003
	CO	0	0,0016	0,0016	0	0	0	0,0315	0,0000	0	0	0	0,0016	0,0000	0	0
i_2	H_2	0	0,0305	0,0305	0	0	0	0,0290	0,0306	0	0	0	0,0299	0,0006	0	0
	N_2	0	0	0	0,0306	0	0	0	0	0,0306	0	0	0	0	0,0006	0
	CH_4	0	0	0	0	0,1067	0	0	0	0	0,1067	0	0	0	0	0,0075
Frischgas	CO_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	CO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_2	H_2	0	0,9370	0,9370	0	0	0	0,9097	0,9595	0	0	0	0,9378	0,0191	0	0
	N_2	0	0	0	0,9595	0	0	0	0	0,9595	0	0	0	0	0,0192	0
	CH_4	0	0	0	0	0,8837	0	0	0	0	0,8837	0	0	0	0	0,0619

4. Wirtschaftliche Probleme. Durch die Gleichung (12a) bzw. (15a), also durch

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r} \text{ mit } \mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix}$$

ist der durch die Durchsätze $\mathfrak{d}$, die Ausbeuten $\mathfrak{a}$ und die Fertigprodukte $\mathfrak{f}$ gekennzeichnete Betriebsablauf $\mathfrak{l}$ als Funktion der eingesetzten Rohprodukte $\mathfrak{r}$ dargestellt. Man bekommt nun einen bequemen Zugang zur Behandlung wirtschaftlicher Probleme, wenn man den oben eingeführten Begriff des Betriebsablaufes etwas erweitert. Bei wirtschaftlichen Problemen spielt der Betriebsaufwand eine wesentliche Rolle. Es ist zweckmäßig, die verschiedenen Aufwandarten, z. B. Rohstoffe, Hilfsstoffe, Energien (soweit diese von außen bezogen und nicht in dem betrachteten Betriebssystem selbst erzeugt werden), Lohnstunden, kurz alle von außen an das Betriebssystem gelieferten Leistungen zu einem erweiterten Rohproduktvektor $\mathfrak{r}^*$ zusammenzufassen. Auch der oben eingeführte Begriff des Durchsatzes soll etwas abgewandelt werden. Dabei werde angenommen, daß sich die Leistung eines Teilbetriebes durch einen oder mehrere skalare Parameter D_k, die Durchsätze der einzelnen Teilbetriebe, eindeutig kennzeichnen läßt, und es mögen diese Durchsätze D_k wieder zu einem, den Ablauf des ganzen Betriebssystems kennzeichnenden „Durchsatzvektor" $\mathfrak{d}$ zusammengefaßt werden. Schließlich mögen die Mengen der verschiedenen Fertigprodukte durch die skalaren Größen F_k gekennzeichnet und zu einem Vektor zusammengefaßt werden. Faßt man die so eingeführten Vektoren gemäß

$$\mathfrak{l}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{r}^* \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix}$$

zu dem „Betriebsvektor" $\mathfrak{l}^*$ zusammen, so enthalten dessen Komponenten die für die betriebswirtschaftliche Beurteilung des vorliegenden Betriebssystemes notwendigen Größen. Während nun im vorhergehenden Abschnitt der Betriebsablauf $\mathfrak{l}$ als Funktion $\mathfrak{l} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{r}$ des Rohproduktvektors dargestellt wurde, ist es für wirtschaftliche Betrachtungen zweckmäßiger, den Betriebsvektor in Abhängigkeit von den Fertigprodukten darzustellen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß unter Umständen fertige Verkaufsprodukte zwangsläufig als Nebenprodukte („Kuppelprodukte") anfallen und daher nicht als unabhängige Veränderliche in der gesuchten Darstellung erscheinen können. Die Fertigprodukte, die nach Ausscheidung dieser Kuppelprodukte übrig bleiben, mögen zu einem Vektor $\bar{\mathfrak{f}}$ zusammengefaßt werden. In vielen Fällen wird es jedoch auch dann nicht möglich sein, den Betriebsvektor $\mathfrak{l}^*$ eindeutig als Funktion von $\bar{\mathfrak{f}}$ darzustellen, man wird vielmehr zur Erfassung von betrieblichen Nebenbedingungen, die unabhängig von der durch $\bar{\mathfrak{f}}$ ausgedrückten Produktionshöhe sind, weitere Betriebsparameter heranziehen müssen, die zu einem vektoriellen Parameter $\mathfrak{n}$ zusammengefaßt seien. Ist nun eine lineare Darstellung möglich, so läßt sich diese in der Form

$$\mathfrak{l}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{r}^* \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^* \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^*\,\mathfrak{p} \tag{16}$$

schreiben.

Der aus den das Produktionsprogramm bestimmenden Fertigprodukten $\bar{\mathfrak{f}}$ und den betrieblichen Nebenbedingungen $\mathfrak{n}$ zusammengesetzte Vektor $\mathfrak{p}$ möge als „Produktionsvektor" bezeichnet werden. Dann läßt sich Gleichung (16), wie folgt, in Worte fassen:

„Betriebsvektor = Strukturmatrix · Produktionsvektor",

wo die Matrix $\mathfrak{P}^*$ als „Strukturmatrix" bezeichnet werde, da sie einen weitgehenden Einblick in das betrachtete Betriebssystem vermittelt. Ein Beispiel für eine solche Strukturmatrix zeigt Tabelle 4, wobei gemäß Abb. 6 ein aus acht Teilbetrieben bestehendes Betriebssystem zugrunde gelegt ist. Dabei wurde $\mathfrak{f} = \bar{\mathfrak{f}}$ angenommen. Unter den Nebenbedingungen $\mathfrak{n}$ findet sich dabei auch die Zeit t, deren Einführung praktisch wohl immer notwendig sein wird, um etwa die in der Betriebswirtschaft häufig als „fixe Kosten" (z. B. Amortisation) bezeichneten Teile des Aufwandes oder die von der Produktionshöhe unabhängigen Verluste zum Ausdruck zu bringen. (Man vergleiche damit auch das Glied $\mathfrak{a}_0\,t$ in der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{d} - \mathfrak{a}_0\,t$, Ziff. 2. Es sei an dieser Stelle lediglich darauf hingewiesen, daß man bei der Aufstellung

Tabelle 4. ***Strukturmatrix $\mathfrak{P}^*$ für ein Betriebssystem mit 8 Betrieben.***

$$\mathfrak{l}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{r}^* \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^* \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^* \mathfrak{p}$$

			$\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}^*}$	$\bar{\mathfrak{f}}'$			$\mathfrak{n}'$		$\mathfrak{f}$
				Fertigprodukte			Temp.-Einfluß	Zeit t	Kapazität (je Stunde)
		Einheit	DM/Einheit	F_1 t	F_2 t	F_3 t	°C · h	h	
$\mathfrak{r}^*$	Rohstoff 1	t	—50,—	1,26	0,6			1,4	
	Rohstoff 2	t	—30,—	0,72	0,8	1,6		1,8	
	Strom	10^3kWh	—25, –	1,6	1,2	1,3		4,0	
	Dampf	t	— 4,—	2,0	2,5	1,5	—0,4	13,0	
	Löhne	h	— 1,30	7,0	6,2	6,5		125,0	
	Sonstiger Aufwand	DM	— 1	38	25	24		560	
$\mathfrak{d}$	Durchsatz D_1	10^3Nm³		2,1	1			1	30
	D_2	10^3Nm³		0,9	1	2		1	31
	D_3	10^3Nm³		3					60
	D_4	10^3Nm³			2				
	D_5	10^3Nm³				2			
	D_6	t		1					10
	D_7	t			1				5
	D_8	t				1			10
$\mathfrak{f}$	Fertigprodukt F_1	DM	245,—	1					
	F_2	DM	170,—		1				
	F_3	DM	160,—			1			

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{l}^*} = (\underbrace{-50,\ -30,\ -25,\ -4,\ -1{,}30,\ -1}_{= -\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}^*}},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \underbrace{245,\ 170,\ 160)}_{= \mathfrak{b}'_{\mathfrak{f}}}$$

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{l}^*} \cdot \mathfrak{P}^* = (65{,}30,\ 42{,}94,\ 41{,}05,\ 1{,}60,\ -998{,}50).$$

einer Strukturmatrix im allgemeinen von entsprechenden Matrizen der Teilbetriebe auszugehen hat und dabei von dem Matrizenkalkül in ähnlicher Weise Gebrauch machen kann, wie es im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde. Nähere Ausführungen darüber sollen einer besonderen Mitteilung vorbehalten bleiben; ein einfaches Beispiel wird jedoch weiter unten noch gebracht.

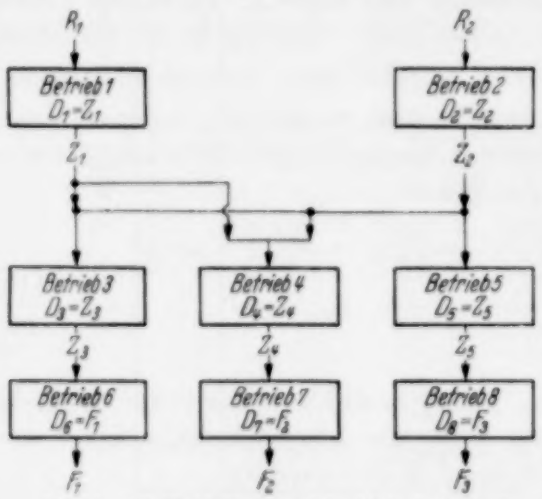


Abb. 6. Fließbild für das Beispiel in Tabelle 4.
Es bedeuten:
R_1 und R_2: Rohprodukte
D_1 bis D_8: Durchsätze
Z_1 bis Z_5: Zwischenprodukte
F_1 bis F_3: Fertigprodukte.

Bei dieser Darstellung empfiehlt es sich, die verschiedenen Aufwandarten, soweit irgend möglich, zunächst mengenmäßig, also etwa in t, kWh, Lohnstunden usw. zu bringen, damit, wie jetzt gleich gezeigt werden soll, der Einfluß der Preise auf die Aufwandarten besonders herausgestellt werden kann. Dazu führt man für den Aufwand $\mathfrak{r}^*$ eine geldmäßige Bewertung durch den Vektor $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}^*}$ ein. Dann ist der gesamte Betriebsaufwand in Geld ausgedrückt durch

$$R^* = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}^*} \cdot \mathfrak{r}^*$$

gegeben, und genau so läßt sich der durch den Verkauf der Fertigprodukte $\mathfrak{f}$ erzielte Erlös durch

$$F = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{f}} \mathfrak{f}$$

ausdrücken. Das wirtschaftliche Ergebnis ist damit durch

$$G = F - R^*$$

gegeben. Führt man nun einen Bewertungsvektor

$$\mathfrak{b}'_{\mathfrak{l}^*} = (-\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}^*}, 0 \cdots 0, \mathfrak{b}'_{\mathfrak{f}}),$$

den „Preisvektor" ein, der zwischen $-\mathfrak{b}'_{\mathfrak{r}^*}$ und $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}'$ genau so viele Nullen enthält wie der Vektor $\mathfrak{d}$ Komponenten hat, so wird schließlich durch

$$G = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{l}^*} \cdot \mathfrak{l}^* = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{l}^*} \cdot \mathfrak{P}^* \mathfrak{p} = \mathfrak{g}' \mathfrak{p} \qquad (17)$$

das wirtschaftliche Ergebnis einmal als skalares Produkt aus Preisvektor $\mathfrak{b}'_i$. und Betriebsvektor $\mathfrak{l}^*$, und außerdem auch als skalares Produkt aus einem Vektor $\mathfrak{g}'$ und dem Produktionsvektor $\mathfrak{p}$ dargestellt. Der Preisvektor $\mathfrak{b}'_i$. vermittelt ein Bild über die von „außen" gegebenen wirtschaftlichen Bedingungen (Preise, Lohnsätze usw.); die Bedeutung des Vektors $\mathfrak{g}'$ wird erkannt, wenn man

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{b}'_i. \mathfrak{P}^* = (g_1, g_2, \cdots g_m)$$

und

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{l}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_m \end{pmatrix}$$

setzt und damit

$$G = \mathfrak{g}' \mathfrak{p} = \sum_{k=1}^{m} g_k P_k$$

schreibt. Ändert sich die Produktion um die „Produktionsspitze" ΔP_k, so ändert sich das wirtschaftliche Ergebnis um den „Spitzengewinn" ΔG und es gilt:

$$\Delta G = g_k \Delta P_k .$$

Daraus ergibt sich die Bedeutung der Komponenten g_k des Vektors $\mathfrak{g}'$ für viele wirtschaftliche Untersuchungen (s. auch Tabelle 4).

Zur Erläuterung soll ein einfach gehaltenes Beispiel der Kostenermittlung für Dampf und Strom dienen. Dabei werde von einer aus einer Kesselanlage, Gegendruckturbinen und Kondensationsturbinen bestehenden Energiezentrale ausgegangen, welche ein Industriewerk mit Hochdruckdampf, Gegendruckdampf und Strom zu versorgen hat. Die gewählten Bezeichnungen für die Durchsätze, Ausbeuten und „Fertigprodukte" gehen aus Abb. 7 hervor.

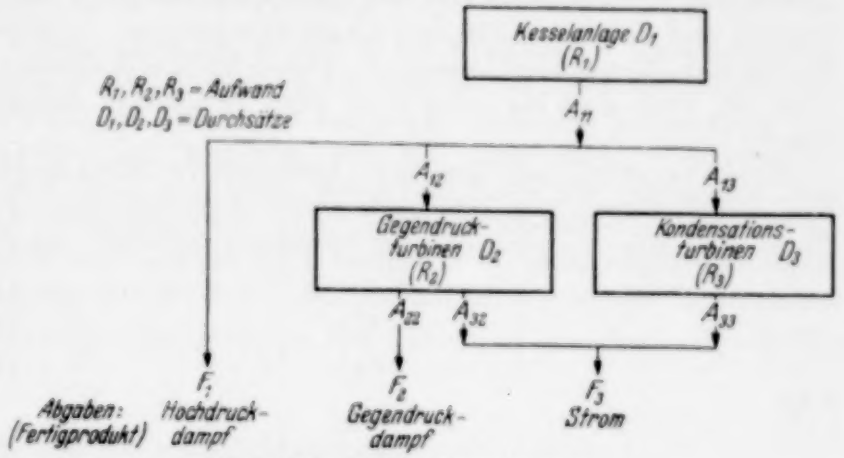


Abb. 7. Schema einer Energiezentrale.

Sämtliche Aufwandarten sollen bereits geldmäßig zusammengefaßt sein und mit R bezeichnet werden. Die Fertigprodukte F_k und der Aufwand R seien zunächst, wie dies bei solchen Problemen meist der Fall ist (vgl. auch die Bemerkung zur Aufstellung der Matrix $\mathfrak{B}^*$), in Abhängigkeit von den Durchsätzen D_k gegeben und zwar durch folgende, stark vereinfachte Matrix:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12} - A_{13} \\ A_{22} \\ A_{32} + A_{33} \\ R_1 + R_2 + R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -w_2 & -w_3 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Es werde nun zunächst auf die im kaufmännischen Rechnungswesen übliche Art die Kostenermittlung für Hochdruckdampf, Gegendruckdampf und Strom gezeigt. Man geht dabei betriebsweise, wie folgt, vor:

Kesselanlage: Aufwand: $R_1 = r_1 D_1 = r_1 A_{11}$,
somit Hochdruckdampfkosten (d. h. Aufwand je t Dampf): $\underline{r_1}$.

Kondensationsturbinen:
direkter Aufwand: $R_3 = r_3 D_3 = r_3 A_{33}$,
indirekter Aufwand[1] im Dampf A_{13}: $r_1 A_{13} = r_1 w_3 A_{33}$,
Gesamtaufwand: $(r_3 + r_1 w_3) A_{33}$,
somit Stromkosten: $\underline{r_3 + r_1 w_3}$.

[1] (Es ist $A_{13} = w_3 D_3 = w_3 A_{33}$).

Gegendruckturbinen:

direkter Aufwand: $R_2 = r_2 D_2 = r_2 A_{32}$,
indirekter Aufwand[1] im Hochdruckdampf: $r_1 A_{12} = r_1 w_2 A_{32}$,
Gutschrift für Stromabgabe: $-(r_3 + r_1 w_3) A_{32}$,
Gesamtaufwand: $[r_1(w_2 - w_3) + (r_2 - r_3)] A_{32}$

oder, da $A_{22} = w_2 D_2 = w_2 A_{32}$,

$$\text{Gesamtaufwand} = \left[r_1\left(1 - \frac{w_3}{w_2}\right) + \frac{r_2 - r_3}{w_2}\right] A_{22},$$

somit Kosten für Gegendruckdampf: $r_1\left(1 - \frac{w_3}{w_2}\right) + \frac{r_2 - r_3}{w_2}$.

Man überzeugt sich unter Benutzung von (18) leicht, daß

$$R = r_1 D_1 + r_2 D_2 + r_3 D_3 = r_1 F_1 + \left[r_1\left(1 - \frac{w_3}{w_2}\right) + \frac{r_2 - r_3}{w_2}\right] F_2 + (r_1 w_3 + r_3) F_3 \qquad (19)$$

gilt, womit der Aufwand auf die „Fertigprodukte" F_1, F_2 und F_3 aufgeteilt und somit deren Kosten ermittelt sind. Wesentlich bei dieser Kalkulation ist, daß der von den Gegendruckturbinen gelieferte Strom zu den sich in der Kalkulation der Kondensationsturbinen ergebenden Stromkosten $(r_3 + r_1 w_3)$ gutgeschrieben wird. Dieser Weg ist jedoch keineswegs der allgemein übliche; es wird vielfach auch so verfahren, daß man den Gegendampf mit $\frac{i_2}{i_1} k_1$ DM je t gutschreibt, wo $k_1 = r_1$ die Hochdruckdampfkosten (in DM/t) und i_2 bzw. i_1 die Enthalpien von Gegendruck- bzw. Hochdruckdampf bedeuten. Man spricht dann von einer kalorischen Bewertung des Dampfes (im Gegensatz zur energetischen Bewertung, wie sie oben angewandt wurde) und bekommt für den Gegendruckstrom im allgemeinen wesentlich geringere Kosten als für den Kondensationsstrom. Diese beiden Kalkulationsmöglichkeiten wurden schon viel erörtert, ohne daß bis jetzt wohl eine endgültige Einigung im Streit der Meinungen erzielt wurde.

Zum Vergleich soll nun der Aufwand in Abhängigkeit von den gelieferten Mengen an Hochdruckdampf, Gegendruckdampf und Strom (den „Fertigprodukten" F_1, F_2 und F_3) unter Benutzung des Matrizenkalküls ermittelt werden. Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -w_2 & -w_3 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{w_3}{w_2} & w_3 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{w_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als zwangsläufige Folge der Gleichung (18)

$$R = (r_1, r_2, r_3) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = (r_1, r_2, r_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{w_3}{w_2} & w_3 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{w_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = r_1 F_1 + \left[r_1\left(1 - \frac{w_3}{w_2}\right) + \frac{r_2 - r_3}{w_2}\right] F_2 + (r_1 w_3 + r_3) F_3,$$

in Übereinstimmung mit (19); unter den Voraussetzungen (18) erscheint somit die energetische Bewertung als die gegebene. Die in diesem Beispiel erörterte Bewertungsfrage ist typisch für viele Kalkulationsprobleme und der hier aufgezeigte Weg zu ihrer Lösung führt in vielen Fällen zum Ziel, vor allem auch dann, wenn die Verhältnisse nicht so einfach liegen, wie in dem behandelten Beispiel.

Auf eine Anwendung der Gleichungen (16) und (17) sei hier noch eingegangen. Bei vielen wirtschaftlichen Untersuchungen ist die maximale Erzeugungsmöglichkeit eines Werkes an

[1] (Es ist $A_{12} = w_2 D_2 = w_2 A_{32}$).

Fertigprodukten, seine „Kapazität", von entscheidender Bedeutung. Da nun bei einem Werk, dessen Einzelbetriebe stark miteinander gekoppelt sind, diese unter Umständen für die Erzeugung verschiedener Fertigprodukte in Anspruch genommen werden müssen, ist es in solchen Fällen nicht möglich, die Kapazität für ein Fertigprodukt unabhängig von den daneben noch zu erzeugenden Fertigprodukten anzugeben. Die dabei auftretenden Verhältnisse lassen sich nun mit Hilfe der Strukturmatrix auf einfache Weise übersehen. Die Kapazitäten der Einzelbetriebe, d. h. ihre maximal möglichen Durchsätze, können nämlich als bekannt vorausgesetzt werden. Sie mögen zu einem „Kapazitätsvektor"

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdot \\ K_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1\,max} \\ D_{2\,max} \\ \cdot \\ D_{m\,max} \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt sein. Andererseits sind die Durchsätze der Einzelbetriebe durch

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{P}^{**} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}^{**}\, \mathfrak{p}$$

gegeben, wo $\mathfrak{P}^{**}$ aus den zur Bestimmung von $\mathfrak{d}$ dienenden Zeilen der Strukturmatrix $\mathfrak{P}^{*}$ besteht. Die Durchführbarkeit der durch $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix}$ dargestellten Produktion ist dann an folgende „Kapazitätsbedingung" geknüpft:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{P}^{**}\, \mathfrak{p} \,(\leq)\, \mathfrak{k}\,, \tag{20}$$

wo $\mathfrak{d}\,(\leq)\,\mathfrak{k}$ soviel bedeuten soll, wie

$$D_i \leq K_i \qquad \text{für alle } i\,.$$

Gilt nun für mindestens ein i das Gleichheitszeichen, so ist für die Produktion $\mathfrak{p}$ ein Grenzfall durch den Betrieb i als Engpaß gegeben. Man kann aber von keiner Maximalproduktion sprechen, solange für $\mathfrak{p}$ keine Maßbestimmung vorgenommen wird. Sind die Kapazitäten der Einzelbetriebe, also der Kapazitätsvektor fest gegeben, was bei kurzfristig zu erfüllenden Produktionsprogrammen die Regel sein wird, so taucht die Frage nach der optimalen Produktion, d. h. beispielsweise nach der Produktion mit dem größten Ergebnis G, auf. Bei der Behandlung dieser Frage ist zu beachten, daß sich für die Durchsätze D_i keine negativen Werte ergeben dürfen. Die Kapazitätsbedingung (20) ist daher durch Einführung zweier Kapazitätsvektoren $\underline{\mathfrak{f}}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ zu verschärfen und die mathematische Formulierung des Optimalproblems lautet dann:

$$G = \mathfrak{g}'\, \mathfrak{p}$$

soll absolutes Maximum werden mit den Nebenbedingungen

$$\underline{\mathfrak{f}}\,(\leq)\,\mathfrak{d} = \mathfrak{P}^{**}\, \mathfrak{p}\,(\leq)\,\bar{\mathfrak{f}}\,.$$

Mit den Zahlenwerten des Beispiels in Tabelle 4 erhält man, wenn man $\underline{\mathfrak{f}} = 0$ setzt und weiter berücksichtigt, daß die Betriebe 3, 4 und 5 gleichartig und aufeinander umschaltbar sein sollen und demgemäß $D_3 + D_4 + D_5$ mit $K_3 + K_4 + K_5$ vergleicht, und wenn man beispielsweise $\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ einsetzt:

$$G = 65{,}30\, F_1 + 42{,}94\, F_2 + 41{,}05\, F_3 - 982{,}50 \text{ soll absolutes Maximum werden}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\leq) \begin{pmatrix} 2.1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 10 \\ 1 \\ \end{pmatrix} (\leq) \begin{pmatrix} 30 \\ 31 \\ 60 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Um in diesem Falle das absolute Maximum von G zu bestimmen, ist zu beachten, daß aus den letzten drei Nebenbedingungen bereits

$$\begin{pmatrix} D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

folgt. Mit $\bar{\mathfrak{f}} = \begin{pmatrix}10\\5\\10\end{pmatrix} = \bar{\mathfrak{f}}$ wird aber $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3+D_4+D_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\35\\60\end{pmatrix}$,

d. h. der dafür erforderliche Durchsatz D_2 liegt um $4 \cdot 10^3$ Nm³/h über der Kapazität von $31 \cdot 10^3$ Nm³/h, während die übrigen Kapazitäten ausreichen. Will man die notwendige Senkung $\Delta D_2 = -4 \cdot 10^3$ Nm³/h lediglich durch Änderung von $F_1 = 10$ um ΔF_1 erzwingen, so wird $\Delta F_1 = \Delta D_2/0{,}9$ und $\Delta G = 65{,}30\ \Delta F_1 = (65{,}30/0{,}9)\ \Delta D_2 = 72{,}56\ \Delta D_2$, während für F_2 bzw. F_3 die entsprechenden Werte $\Delta G = (42{,}94/1)\,\Delta D_2 = 42{,}94\,\Delta D_2$, bzw. $= (41{,}05/2)\,\Delta D_2 = 20{,}52\,\Delta D_2$ lauten. Die geringste Abnahme von G (gegenüber dem für $\bar{\mathfrak{f}}$ erreichbaren Betrag) wird daher durch $\Delta F_1 = 0$, $\Delta F_2 = 0$, $\Delta F_3 = -4/2 = -2$ erreicht. Man erhält also für $\bar{\mathfrak{f}} = \begin{pmatrix}10\\5\\8\end{pmatrix}$ ein absolutes Maximum $G_{max} = 213{,}60$ DM/h.

Man kann das Optimalproblem noch etwas allgemeiner fassen, wenn man berücksichtigen will, daß z. B. auch die Grenzen für die Rohstofflieferungen $\mathfrak{r}$ und die Absatzmöglichkeiten für die Fertigprodukte $\mathfrak{f}$ einen Engpaß darstellen können. Man braucht dazu nur für den Betriebsvektor $\mathfrak{l}^*$ Grenzvektoren $\underline{\mathfrak{l}}^*$ und $\bar{\mathfrak{l}}^*$ einzuführen und hat damit folgende, wohl für die meisten praktisch auftretenden Fälle hinreichende Fassung des wirtschaftlichen Optimalproblems:

„Es wird der Vektor $\mathfrak{p}$ gesucht, für den

$$G = \mathfrak{g}'\,\mathfrak{p}$$

ein absolutes Maximum mit den Nebenbedingungen:

$$\underline{\mathfrak{l}}^* (\leq) \mathfrak{l}^* = \mathfrak{P}^*\,\mathfrak{p} (\leq) \bar{\mathfrak{l}}^*$$

darstellt." Als Beispiel (nach Tabelle 4) sei wieder angenommen, daß die Rohstofflieferung R_1 auf 12 t/h beschränkt sei. Dann ergibt sich in ähnlicher Weise, wie oben, ein Maximum

$$G_{max} = 27{,}84 \text{ DM/h für } \bar{\mathfrak{f}} = \begin{pmatrix}6{,}03\\5\\9{,}79\end{pmatrix}.$$

Zu beachten ist bei dieser Formulierung, daß in dem Vektor $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}\\ \mathfrak{n}\end{pmatrix}$ weitere Nebenbedingungen $\mathfrak{n}$ enthalten sein können, die im allgemeinen nicht variiert werden dürfen. Da G eine in $\mathfrak{p}$ lineare Form darstellt, handelt es sich bei der Lösung des Optimalproblems um die Ermittlung eines Randextremums. Mit der Aufstellung der Strukturmatrix $\mathfrak{P}^*$, aus der sich gemäß (17) leicht der Vektor $\mathfrak{g}' = \mathfrak{b}_l' \cdot \mathfrak{P}^*$ ergibt, ist ein wichtiger Schritt zur Lösung dieser Aufgabe getan und weitgehend vorbereitende Rechenarbeit geleistet für solche Fälle, wo aus allgemein wirtschaftlichen oder innerbetrieblichen Gründen sich die Grenzvektoren $\underline{\mathfrak{l}}^*$ bzw. $\bar{\mathfrak{l}}^*$ und damit auch der optimale Vektor $\mathfrak{p}$ ändern.

5. Ermittlung der Matrizen für die einzelnen Teilbetriebe. Bei allen Untersuchungen wurde bis jetzt davon ausgegangen, daß sich die einzelnen Teilbetriebe eines Betriebssystems durch Matrizen, also durch eine Anzahl linearer Funktionen kennzeichnen lassen, und der Schwerpunkt der Untersuchungen lag darin, wie sich aus diesen einzelnen Teilmatrizen eine das ganze Betriebssystem hinreichend kennzeichnende Strukturmatrix aufbauen läßt. Die Anwendbarkeit der geschilderten Methoden hängt also davon ab, wie weit solche lineare Darstellungen überhaupt möglich sind und wie sie sich praktisch ermitteln lassen. Darauf soll jetzt noch etwas eingegangen werden.

Zunächst sei bemerkt, daß die Theorie vieler technologischer Prozesse noch lange nicht so weit entwickelt ist, wie etwa die Theorie der elektrischen Maschinen, der Wasserkraftmaschinen oder Dampfturbinen, bei denen sich eine Charakteristik mit großer Genauigkeit vorausberechnen läßt. Es ist daher im allgemeinen auch nicht zu erwarten, daß man allein auf Grund theoretischer Überlegungen die Charakteristik eines Teilbetriebes, d. h. seine Ausbeute und seinen Energiebedarf in Abhängigkeit von seinem Durchsatz und sonstigen vorgegebenen Einflußgrößen mit hinreichender Genauigkeit berechnen kann. Man ist daher, wenn man zu einer Charakteristik kommen will, auf eine Auswertung der Betriebsergebnisse angewiesen. Es ist also notwendig, daß die Betriebsergebnisse laufend gemessen, und die Meßergebnisse zusammengestellt und ausgewertet werden. Dies ist aber eine Voraussetzung,

die für einen nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten geleiteten Betrieb schon seit langem als selbstverständlich gilt. Liegen nun für eine größere Anzahl Zeitabschnitte mit verschiedenen Durchsätzen Meßergebnisse vor, so ist es naheliegend, nach den bewährten Methoden der mathematischen Statistik nach den Zusammenhängen zwischen Ausbeuten, Energieverbrauch usw. zu suchen. Bei der praktischen Durchführung hat es sich dabei als zweckmäßig erwiesen, bei den Zeitabschnitten, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen werden, nicht unter einen Monat herunterzugehen; liegt genügend Zahlenmaterial vor, so ist die Auswertung nach „Vierteljahrspunkten" vorzuziehen. Man darf jedoch bei diesen Auswertungen nicht rein formal vorgehen, sondern muß immer die speziellen betrieblichen Verhältnisse im Auge behalten und soweit, als irgend möglich, auch theoretische Erwägungen heranziehen. Dadurch werden den vorzunehmenden Ausgleichsrechnungen vielfach Nebenbedingungen auferlegt. Es kann auch zuweilen zweckmäßig sein, besonders wenn mehrere unabhängige Veränderliche zur Beschreibung herangezogen werden müssen, eine theoretisch faßbare Größe mit ihren im Betrieb erreichten Werten zu vergleichen und so die besonderen Betriebskonstanten herauszuschälen. Wenn nun aber auch die Statistik einen breiten Raum bei der Ermittlung der Betriebscharakteristik einnimmt, so gibt es doch auch Fälle, wo eine unmittelbare Betrachtung rascher zum Ziele führt. So wird es vielfach möglich sein, den Arbeitskräftebedarf durch eine genaue Untersuchung der bei den verschiedenen Betriebsbedingungen notwendigen Arbeitsplätze unmittelbar zu bestimmen. Gerade dieses Beispiel zeigt übrigens deutlich, daß bei einer genauen Betriebscharakteristik auch mit Unstetigkeiten gerechnet werden muß, wenn z.B. etwa eine weitere Durchsatzsteigerung nur durch Zuschalten eines weiteren Apparates möglich ist, was unter Umständen mit einer sprunghaften Änderung des Arbeitskräftebedarfes verbunden sein kann.

Bei der Aufstellung einer großen Anzahl von Betriebscharakteristiken der chemischen Industrie, die unter Beachtung des soeben Gesagten für die verschiedensten Betriebe vorgenommen wurde, hat es sich ergeben, daß die den Betriebsablauf kennzeichnenden Größen mit praktisch hinreichender Genauigkeit fast immer durch lineare — oder genauer gesagt, durch stückweise lineare — Funktionen des Durchsatzes und sonstiger Einflußgrößen dargestellt werden können. Wenn sich dabei zu Beginn der Untersuchungen größere Abweichungen von einer strammen linearen Bindung ergaben, so lag — abgesehen von Meßfehlern — die Ursache meist darin, daß zunächst irgendein Betriebsparameter nicht berücksichtigt wurde, d.h. mathematisch gesprochen, daß zu wenig unabhängige Veränderliche zur Beschreibung des Betriebsablaufes herangezogen wurden. Diese weitgehende Möglichkeit der linearen Beschreibung liegt in der Struktur der chemischen Betriebe begründet, derzufolge kleinere Durchsatzänderungen durch „Tiefer"- oder „Höherfahren" der einzelnen Maschinen und Apparate, größere Änderungen dagegen durch Ab- oder Zuschalten von Maschinen und Apparaten bewirkt werden. Dadurch entsteht für die Betriebscharakteristik eine Art Treppenkurve, die, wenn die Stufen nicht zu hoch sind, mit hinreichender Genauigkeit durch eine Gerade ersetzt werden kann. Wenn man nun bedenkt, daß die einzelnen „Treppenstufen" nicht in allen Betrieben eines Betriebssystems gleichzeitig erreicht werden, so ist einleuchtend, daß für das gesamte Betriebssystem die lineare Darstellung mit wesentlich größerer Genauigkeit als für die einzelnen Teilbetriebe möglich ist, was sich praktisch immer wieder bestätigt hat. Es ist jedoch nicht immer möglich, auftretende Unstetigkeiten einfach zu glätten. Wenn die Beibehaltung von Unstetigkeiten für die Weiterrechnung notwendig ist, kann man im Interesse einer glatten Rechnung häufig, wie folgt, vorgehen. Es sei etwa eine Aufwandart A, z.B. der Dampfverbrauch, gemäß nachstehender Beziehung vom Durchsatz und der Außentemperatur abhängig:

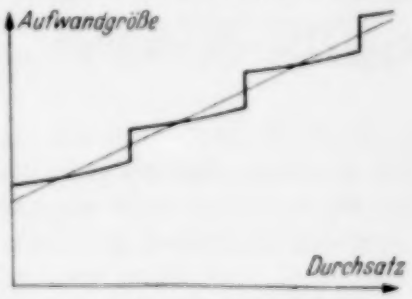


Abb. 8. Treppenkurve als Betriebscharakteristik.

$$A = a\,D + b_1 \int_0^t \vartheta\, dx \quad \text{für} \quad \vartheta \leq \vartheta_0\,,$$

$$= a\,D + b_2 \int_0^t \vartheta\, dx \quad \text{für} \quad \vartheta > \vartheta_0\,,$$

wo A bzw. D Aufwand bzw. Durchsatz für den Zeitabschnitt t und ϑ die Außentemperatur bedeuten. Wenn die Glieder $b_1 \int_0^t \vartheta\, dx$ bzw. $b_2 \int_0^t \vartheta\, dx$ beispielsweise den für die Raumheizung

benötigten Dampf zum Ausdruck bringen, so würde $b_2 = 0$ heißen, daß beim Überschreiten der Temperatur ϑ_0 keine Heizung mehr erforderlich ist. Schreibt man nun

$$A = aD + b_1 t_1 + b_2 t_2$$

$$\text{mit} \quad t_1 = \int_0^t \vartheta' dx\,, \quad \vartheta' = \vartheta \quad \text{für} \quad \vartheta \leq \vartheta_0\,,$$

$$\vartheta' = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta > \vartheta_0\,,$$

$$\text{und} \quad t_2 = \int_0^t \vartheta' dx\,, \quad \vartheta'' = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta \leq \vartheta_0\,,$$

$$\vartheta'' = \vartheta \quad \text{für} \quad \vartheta > \vartheta_0\,,$$

so hat man formal die Unstetigkeit (bzw. den Knick) bei ϑ_0 dadurch beseitigt, daß man an Stelle des einen Parameters $\int_0^t \vartheta\, dx$ zwei Parameter t_1 und t_2 eingeführt hat. t_1 bedeutet dabei das Temperaturzeitintegral für den Teil des Zeitabschnittes t mit einer Temperatur $\leq \vartheta_0$ und das Entsprechende gilt für t_2. Auf diese Weise wird erreicht, daß man mit der, allerdings um eine Spalte erweiterten Matrix glatt weiterrechnen kann. Soll aber aus der Strukturmatrix $\mathfrak{P}^*$ für irgend einen Produktionsfall $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ enthält als Komponenten die Parameter t_1 und t_2) der Betriebsablauf $\mathfrak{l}^*$ berechnet werden, so ist es nur notwendig, vor Beginn der eigentlichen Rechnung die Werte für die Komponenten t_1 und t_2 zu ermitteln, und die u. U. vollautomatisch durchgeführte Rechnung (s. nächster Abschnitt, Ziff. 6) läuft ebenfalls glatt. Erfahrungsgemäß stellt die Aufstellung der Matrizen für die einzelnen Teilbetriebe weitaus den größten Teil der für den Aufbau der Strukturmatrix des Gesamtwerkes zu leistenden Rechenarbeit dar. Es ist aber zu erwähnen, daß bereits die Teilmatrizen ein brauchbares Hilfsmittel für die wirtschaftliche Überwachung der einzelnen Betriebe darstellen, wenn man sie als Maßstab bei der Beurteilung der laufenden Betriebsergebnisse verwendet. Auf eine Möglichkeit, auch nichtlineare Zusammenhänge mit dem Kalkül noch zu behandeln, sei abschließend kurz hingewiesen. Es sei etwa die Vektorfunktion

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{A}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gegeben, ferner etwa die Funktion:

$$y_{m+1} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{x}_1 + a\, y_m\, x_n\,;$$

dann läßt sich schreiben

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ y_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & 0 \\ \mathfrak{a}' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ y_m\, x_n \end{pmatrix} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}\,.$$

Die Zahlenrechnung geht dann so vor sich, daß zunächst der Vektor $\mathfrak{y}_1$ berechnet wird; damit ist dann die m-te Komponente des Vektors $\mathfrak{y}$, und damit auch die $(n+1)$-te Komponente $y_m x_n$ des Vektors $\mathfrak{x}$ gegeben, so daß nach der Zwischenrechnung für die Ermittlung von $y_m\, x_n$ auch y_{m+1} errechnet werden kann. Man bleibt so, abgesehen von einer kurzen Unterbrechung, im Kalkül, und dies ist für die praktische Zahlenrechnung nicht unbedeutend.

6. Praktische Anwendungen. In den vorausgehenden Abschnitten wurde gezeigt, in welcher Weise sich der Matrizenkalkül bei der Darstellung von Betriebsabläufen bei Betriebssystemen verwenden und die meist sehr umfangreichen Zahlenrechnungen auf die Grundoperationen der Matrizenrechnung zurückführen lassen. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist eine Strukturmatrix, in der in übersichtlicher Weise die Struktur des Werkes beschrieben wird und die eine zahlenmäßige Kenntnis der Betriebszusammenhänge vermittelt, die sonst, besonders bei umfangreichen Werken, sich kaum in dieser Ausführlichkeit gewinnen läßt. Voraussetzung ist allerdings, daß eine lineare Darstellung überhaupt möglich ist. Diese Voraussetzung ist jedoch in vielen Fällen praktisch mit hinreichender Genauigkeit erfüllt; auch läßt sich häufig Linearisierung durch einfache Mittel erreichen. Der Hauptvorteil für die praktischen Anwendungen der Matrizen auf Aufgaben wirtschaftlicher und technologischer Art besteht nun darin, daß mit der Aufstellung einer Matrix für viele solche Aufgaben der größte Teil der Rechenarbeit bereits vorbereitend erledigt und das Ergebnis dieser vorbereitenden Arbeit in

der Matrix gespeichert ist. Die Durchrechnung eines speziellen Falles besteht dann vielfach nur noch in der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor, und diese kann in kürzester Zeit und ohne besondere mathematische Kenntnisse durchgeführt werden. Beides ist in der Praxis von großer Bedeutung. Man bringt die Matrix zweckmäßig in folgende Form:

	1	2	3	4	·	·	n	
	X_1	X_2	X_3	X_4			X_n	
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	·	·	p_{1n}	
	$P_{11}X_1$	$P_{12}X_2$	$P_{13}X_3$	$P_{14}X_4$			$P_{1n}X_n$	Y_1
·	·	·	·	·	·	·	·	
m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	p_{m4}	·	·	p_{mn}	
	$P_{m1}X_1$	$P_{m2}X_2$	$P_{m3}X_3$	$P_{m4}X_4$			$P_{mn}X_n$	Y_m

Die Spalten 1 bis n dienen zur Erfassung des vorgegebenen Produktionszustandes, d. h. der verschiedenen Fertigprodukte und Nebenbedingungen, die an Stelle der Ziffern 1 bis n in der werksüblichen Nomenklatur eingetragen werden.

Die Zeilen 1 bis m dienen zur Berechnung der gesuchten Größen, z. B. der benötigten Rohstoffe, der Durchsätze der Teilbetriebe usw.; auch sie werden namentlich an Stelle der Ziffern 1 bis m eingetragen.

Die Rechenvorschrift lautet nun einfach so: „Man trage in die oberste freie Zeile die vorgegebenen Werte für den Produktionszustand, die „Ausgangszahlen" (in großen Buchstaben dargestellt) ein. Um den Wert für irgendeine Zeilengröße zu berechnen werden die in dieser Zeile stehenden Koeffizienten mit den senkrecht darüber stehenden Zahlen der obersten Zeile multipliziert und in die dafür vorgesehene Freizeile eingetragen. Die Summe dieser einzelnen Produkte gibt den gesuchten Wert der jeweiligen Zeilengröße und wird in die letzte freie Spalte eingetragen."

Mit dieser einfachen Rechenregel kann einem Nichtmathematiker in kürzester Zeit die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erläutert werden, so daß er praktisch damit rechnen kann. Wenn mit einer Rechenmaschine gerechnet wird, welche die einzelnen Produkte gleich aufzusummieren gestattet, wird man in den Matrizenformularen die Zwischenfreizeilen weglassen, dafür aber oben und rechts mehrere Freizeilen und Freispalten vorsehen, damit ein Formblatt für mehrere Rechnungen benutzt werden kann. Gibt man als „Ausgangszahlen" die Spaltenvektoren einer zweiten Matrix $\mathfrak{Q}$ vor, so kann auf diese Weise auch die Multiplikation zweier Matrizen durchgeführt werden.

Wenn man eine Matrix $\mathfrak{P}$ in dieser Weise anordnet, d. h. an die einzelnen Zeilen und Spalten gleich ihren „Namen" schreibt, so erübrigt sich eine besondere Erklärung, was in der Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{P}\mathfrak{x}$ unter den Komponenten der Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ zu verstehen ist. Dieser Vorteil ist, so trivial er erscheint, bei umfangreichen Matrizen mit etwa 50 Zeilen und Spalten, was in der Praxis keine Seltenheit ist, nicht zu unterschätzen. Ein weiterer Vorteil ist für die Praxis darin zu erblicken, daß sich die Berechnung des Produktes $\mathfrak{P}\mathfrak{x}$ mit Hilfe von Lochkartenmaschinen durchführen läßt. Zu diesem Zweck wird die Matrix $\mathfrak{P}$ in einen Stapel Lochkarten abgewandelt, die nur einmal, solange die Matrix Gültigkeit hat, von Hand gelocht werden müssen. Soll nun $\mathfrak{P}\mathfrak{x}$ für einen bestimmten Vektor $\mathfrak{x}$ berechnet werden, so brauchen nur dessen Komponenten von Hand gelocht zu werden; alle anderen Rechnungen werden automatisch durchgeführt. Locht man in die Lochkarten der Matrix auch noch die Komponenten des Bewertungsvektors $\mathfrak{b}'_{l^*}$ (Ziff. 4) ein, so hat man die Möglichkeit, die Komponenten des Betriebsvektors $\mathfrak{l}^*$ (Ziff. 4) nicht nur mengenmäßig, sondern auch geldmäßig ausrechnen zu lassen und bekommt damit auch automatisch das Ergebnis G. In dieser Möglichkeit, die Matrizenrechnung durch Lochkartenmaschinen durchzuführen, liegt vielleicht ein besonderer Anreiz für größere Werke, dieses Verfahren anzuwenden.

7. Zusammenfassung. Der Betriebsablauf eines aus vielen miteinander verkoppelten Betrieben bestehenden Industriewerkes läßt sich in einer der Struktur des Werkes angepaßten Weise durch eine Matrix beschreiben. Dadurch wird es möglich, für viele wirtschaftliche Auf-

gabenstellungen den größten Teil der erforderlichen Rechnungen vorbereitend zu erledigen und deren Ergebnis in einer „Strukturmatrix" zu speichern. Um einen vorgegebenen Betriebsfall durchzurechnen, bedarf es dann nur noch einer Multiplikation dieser Matrix mit einem den betreffenden Einzelfall kennzeichnenden Vektor, eine Aufgabe, die auch von nicht besonders mathematisch vorgebildeten Kräften, ja sogar rein maschinell mit Lochkartenmaschinen durchgeführt werden kann. Die besondere Anpassungsfähigkeit des Kalküls zeigt sich in vollem Umfang bei der Aufgabe, aus den Matrizen der Einzelbetriebe die des ganzen Betriebssystems aufzubauen. Die Nichtvertauschbarkeit der Matrizenmultiplikation und die Singularität von Matrizen finden dabei ihre sinnvolle Deutung in den betrieblichen Verhältnissen.

Eine Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben erscheint vor allem da aussichtsreich, wo ein aus vielen Einzelbetrieben stammendes Zahlenmaterial unter besonderer Herausstellung der kausalen Zusammenhänge zusammengefaßt und für praktische Anwendungen nutzbar gemacht werden soll. Der dazu nötige mathematische Apparat ist meist durchaus einfach. So zeigt es sich, daß ein von den Mathematikern schon längst entwickelter Kalkül mit Vorteil auf Probleme der modernen Wirtschaft angewandt werden kann.

(Eingegangen am 16. September 1952)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *O. Pichler*, Leuna (Krs. Merseburg) Wickenweg 9.

Die dünne Kreisplatte mit pulsierender Randbelastung in ihrer Mittelebene als Stabilitätsproblem.

Von K. A. Reckling.

1. Einleitung und Problemstellung. Der Einfluß einer konstanten Randbelastung auf die Biegeschwingungen von dünnen Kreisplatten wurde zuerst von *Federhofer*[1] untersucht. Kommt noch, wie es in der vorliegenden Untersuchung angenommen wird, eine periodisch veränderliche Randbelastung mit vorgegebener Frequenz hinzu, so tritt die Frage in den Vordergrund, bei welchen zusammengehörigen Werten von Randbelastung und Frequenz die erzwungenen Radialschwingungen der Platte instabil werden, bzw. wann die durch eine kleine Störung eingeleiteten Biegeschwingungen mit der Zeit immer stärker anwachsen. Dieses ist die übliche Fragestellung bei allen Stabilitätsproblemen der Elastokinetik, von denen als einfachstes Beispiel der durch pulsierende Längskräfte belastete gerade Stab mehrfach behandelt wurde[2]. Das in einer früheren Arbeit des Verfassers[3] zur Lösung eines dynamischen Stabilitätsproblems benutzte Verfahren der Störungsrechnung führt auch im vorliegenden Falle zum Ziel.

Die Platte sei nach Abb. 1 am Rande durch eine in ihrer Mittelebene wirkende, allseitig gleichmäßige Radialkraft $P_0 + P_1 \cos \omega t$ belastet, wobei der statische, als Druck positiv gerechnete Anteil P_0 und die Amplitude P_1 des mit der vorgegebenen Frequenz ω schwingenden, zeitlich veränderlichen Anteils je Längeneinheit des Umfangs gerechnet sind. Die Platte soll am Rande in gleicher Höhe gestützt und dort in beliebiger Weise eingespannt sein. Ihre Dicke h sei klein im Vergleich zum Radius R. Der Einfluß der Dämpfung wird bei der Untersuchung nicht berücksichtigt.

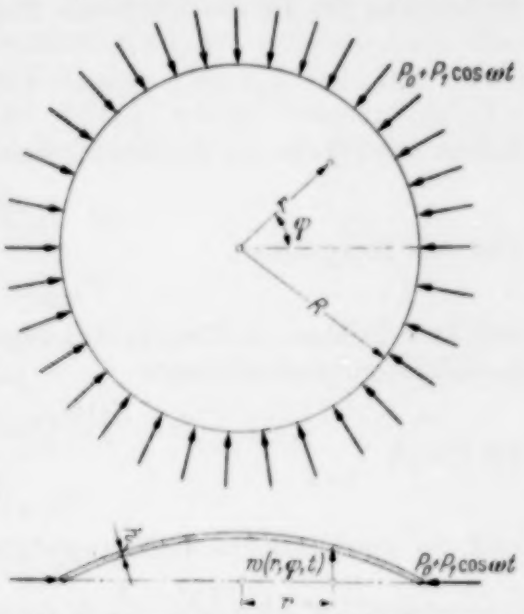


Abb. 1. Kreisplatte mit pulsierender Radiallast.

2. Die Differentialgleichung der Biegeschwingungen und der Ansatz zu ihrer Lösung. Wenn r und φ als Polarkoordinaten eines Plattenpunktes eingeführt werden, mit m die Masse der Platte je Flächeneinheit und mit $N = G h^3/6(1-\nu)$ ihre Steifigkeit bezeichnet wird, so lautet die Differentialgleichung für die Auslenkung $w(r, \varphi, t)$ aus der ursprünglichen Plattenmittelebene[1], wenn die konstante Belastung durch die zeitlich veränderliche ersetzt wird,

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{N}{m} \Delta\Delta w + \frac{1}{m} (P_0 + P_1 \cos \omega t)\, \Delta w = 0 , \tag{1}$$

wobei zur Abkürzung der Operator

$$\Delta (r, \varphi) \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \equiv D(r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{2}$$

eingesetzt wurde. Nach Einführung von

$$\left.\begin{aligned} w = \eta h , \quad r = \varrho R , \quad t = \sqrt{\frac{m R^4}{N}} , \quad \alpha = \omega \frac{t}{\tau} , \\ \varepsilon_0 = \frac{P_0}{P_K} , \quad \varepsilon_1 = \frac{P_1}{P_K} , \quad \mu^2 = \frac{R^2}{N} P_K \end{aligned}\right| \tag{3}$$

und P_K als erster statischer Knicklast der Platte geht die Differentialgleichung (1) der Biegeschwingungen über in die dimensionslose Form

$$\ddot{\eta} + \Delta\Delta \eta + \mu^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \alpha \tau)\, \Delta \eta = 0 . \tag{4}$$

---

[1] *K. Federhofer*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 68.
[2] Vgl. Schrifttumsangaben der in Fußnote 3 genannten Arbeit.
[3] *K. A. Reckling*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 137.

worin Ableitungen nach τ mit Punkten bezeichnet sind und der Operator $\Delta(\varrho, \varphi)$ entsprechend (2) definiert ist. Diese Differentialgleichung ist unter Anpassung an die jeweiligen Rand- und Anfangsbedingungen zu integrieren, und schließlich ist zu untersuchen, bei welchen Frequenzen α und Belastungen ε die Auslenkungen η mit der Zeit τ anwachsen.

Aus der Entwicklung der Lösung von (4) nach wachsenden Potenzen des Parameters ε_1

$$\eta(\varrho, \varphi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1^n \eta_n(\varrho, \varphi, \tau) \tag{5}$$

folgt das System

$$\ddot{\eta}_0 + \Delta\Delta\eta_0 + \mu^2 \varepsilon_0 \Delta\eta_0 = 0\,, \tag{6}$$

$$\ddot{\eta}_n + \Delta\Delta\eta_n + \mu^2 \varepsilon_0 \Delta\eta_n = -\mu^2 \cos\alpha\,\tau\, \Delta\eta_{n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots,m) \tag{6a}$$

von $m+1$ partiellen Differentialgleichungen, dessen Einzelgleichungen sukzessive zu lösen sind.

3. Freie Biegeschwingungen. Durch Gleichung (6) werden die freien Biegeschwingungen der Platte beschrieben. Für den Spezialfall $\ddot{\eta}_0 = 0$ und $\varepsilon_0 = 1$ stellt (6) die Differentialgleichung der Plattenknickung dar; ihre Integration ergibt bei Anpassung an die jeweiligen Randbedingungen die Eigenwerte μ und damit die Knicklasten, von denen für die vorliegende Untersuchung nur die erste interessiert und für das folgende als bekannt angenommen wird. Auch die Lösung der vollständigen Gleichung (6) ist bekannt[1], soll hier aber wegen ihrer Bedeutung für die anschließende Rechnung kurz wiedergegeben werden: Der Ansatz

$$\eta_0(\varrho, \varphi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U_{0,kp}(\varrho, \varphi)\, \Phi_{0,kp}(\tau) \tag{7}$$

liefert aus (6) für die Zeitfunktionen die Differentialgleichungen

$$\ddot{\Phi}_{0,kp} + \omega_{kp}^2 \Phi_{0,kp} = 0$$

mit den Integralen

$$\Phi_{0,kp} = A_{kp} \cos\omega_{kp}\tau + B_{kp} \sin\omega_{kp}\tau\,, \tag{8}$$

welche beliebigen Anfangsbedingungen angepaßt werden können, sowie für die Ortsfunktionen die Differentialgleichungen

$$\Delta\Delta U_{0,kp} + \mu^2 \varepsilon_0 \Delta U_{0,kp} - \omega_{kp}^2 U_{0,kp} = 0\,, \tag{9}$$

die durch

$$U_{0,kp}(\varrho, \varphi) = u_{0,kp}(\varrho) \sin(p\varphi + \varphi_0) \tag{10}$$

und die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(\varrho\, u''_{0,kp})'' + \left[\left(\frac{2p^2-1}{\varrho} + \mu^2 \varepsilon_0 \varrho\right) u'_{0,kp}\right]' + \left[\frac{p^4 - 4p^2}{\varrho^3} - \mu^2 \varepsilon_0 \frac{p^2}{\varrho} - \varrho\,\omega_{kp}^2\right] u_{0,kp} = 0 \tag{11}$$

erfüllt werden. Letztere lassen sich mit Hilfe der symbolischen Schreibweise nach (2) in die Form

$$\left[D(\varrho) - \left(\bar{\lambda}_{kp}^2 + \frac{p^2}{\varrho^2}\right)\right]\left[\left\{D(\varrho) + \left(\lambda_{kp}^2 - \frac{p^2}{\varrho^2}\right)\right\} u_{0,kp}\right] = 0 \tag{11a}$$

mit

$$\left.\begin{matrix}\bar{\lambda}_{kp}^2 \\ \lambda_{kp}^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\mu^2\varepsilon_0)^2 + 4\omega_{kp}^2} \mp \mu^2\varepsilon_0\right), \quad \omega_{kp}^2 = \lambda_{kp}^2 \bar{\lambda}_{kp}^2 \tag{11b}$$

bringen, also in zwei Gruppen von *Bessel*schen Differentialgleichungen aufspalten, von deren Integralen nur $J_p(\lambda_{kp}\varrho)$ und $J_p(i\,\bar{\lambda}_{kp}\varrho)$ als Lösungen in Frage kommen, da die Durchbiegung für $\varrho = 0$ endlich bleiben muß. Wenn man die durch die Beziehung $I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho) = i^{-p} J_p(i\,\bar{\lambda}_{kp}\varrho)$ definierten modifizierten *Bessel*schen Funktionen einführt und beachtet, daß die Platte am Rande in gleicher Höhe gestützt, also $u_{0,kp}(1) = 0$ sein soll, erhält man die Eigenfunktionen der freien Biegeschwingungen

$$u_{0,kp}(\varrho) = C_{kp}\left[J_p(\lambda_{kp}\varrho) - \frac{J_p(\lambda_{kp})}{I_p(\bar{\lambda}_{kp})}\, I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho)\right] \tag{12}$$

mit den beliebigen Konstanten C_{kp}. Der Index k bezeichnet die Anzahl der Knotenkreise, während p die Zahl der Knotendurchmesser angibt.

[1] Vgl. z. B. Fußnote 1 auf Seite 141.

4. Frequenzgleichungen; Orthogonalität der Eigenfunktionen. Die Eigenwerte λ_{kp} und $\bar{\lambda}_{kp}$ — und damit nach (11a) die Eigenfrequenzen ω_{kp} — erhält man aus Frequenzgleichungen, deren Gestalt sich nach den Einspannbedingungen am Plattenrande richtet. Ist die Platte am Rande elastisch eingespannt, so ist dort die Bedingung [1]

$$u''_{0,kp}(1) + (\nu + c)\, u'_{0,kp}(1) = 0 \tag{13}$$

zu erfüllen, wobei c den Einspannungsgrad angibt und die Striche Ableitungen nach ϱ bedeuten. Führt man (12) hierin ein, so erhält man als allgemeine Frequenzgleichung

$$\left.\begin{aligned}[1-(\nu+c)]\,[\bar{\lambda}_{kp} J_p(\lambda_{kp})\, I_{p-1}(\bar{\lambda}_{kp}) - \lambda_{kp} J_{p-1}(\lambda_{kp})\, I_p(\bar{\lambda}_{kp})] - \\ -(\lambda_{kp}^2 + \bar{\lambda}_{kp}^2)\, J_p(\lambda_{kp})\, I_p(\bar{\lambda}_{kp}) = 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

aus der sich leicht die Gleichungen für spezielle Einspannbedingungen herleiten lassen; z. B. für freie Auflagerung mit $c=0$ und für vollkommene Einspannung mit $1/c=0$. Wenn man eine elastische Einspannung $c=1-\nu$ vorschreibt, also mit der Einspannungsbedingung $u''_{0,kp}(1) + u'_{0,kp}(1) = 0$ das Verschwinden der mittleren Krümmung am Plattenrande verlangt, so erhält man die einfache Frequenzgleichung $J_p(\lambda_{kp}) = 0$, die als Näherungsgleichung für die freie Auflagerung verwendet werden kann (vgl. Ziff. 7). Die beiden Eigenwerte sind nach (11b) durch die Beziehung $\lambda_{kp}^2 - \bar{\lambda}_{kp}^2 = \mu^2 \varepsilon_0$ miteinander verknüpft und werden für verschwindende statische Vorbelastung gleich.

Für die spätere Rechnung kommt es auf die Orthogonalität der Eigenfunktionen an. Das Eigenwertproblem (11) läßt sich in der abgekürzten Form $L[u_{0,kp}] = \varrho\, \omega_{kp}^2\, u_{0,kp}$ mit den Randbedingungen (13) schreiben, wobei der Differentialausdruck $L[u_{0,kp}]$ selbstadjungiert ist. Aus dem für zwei Eigenfunktionen $u_{0,kp}$ und $u_{0,np}$ gebildeten Integral

$$\int_{\varrho=0}^{1} (u_{0,kp}\, L[u_{0,nn}] - u_{0,np}\, L[u_{0,kp}])\, d\varrho$$

erhält man durch Teilintegration

$$(\omega_{kp}^2 - \omega_{np}^2) \int_{\varrho=0}^{1} \varrho\, u_{0,kp}\, u_{0,np}\, d\varrho = [u''_{0,kp}\, u_{0,np} - u''_{0,np}\, u_{0,kp}]_{\varrho=0} - [u''_{0,kp}\, u'_{0,np} - u''_{0,np}\, u'_{0,kp}]_{\varrho=1} - \left[\frac{u'_{0,kp}\, u_{0,np} - u'_{0,np}\, u_{0,kp}}{\varrho}\right]_{\varrho=0}.$$

Da im dritten Randteil auf der rechten Seite

$$[u'_{0,kp}\, u_{0,np} - u'_{0,np}\, u_{0,kp}]_{\varrho=0} = 0$$

sein muß, hebt er sich gegen den ersten fort, während der zweite wegen der Randbedingung (13) verschwindet. Das Eigenwertproblem ist daher für alle Randbedingungen und alle Schwingungsformen selbstadjungiert, d. h. die Eigenfunktionen sind mit der Belegungsfunktion ϱ orthogonal und können außerdem durch passende Wahl der beliebigen Konstanten C_{kp} in (12) normiert werden. Somit gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{\varrho=0}^{1} \varrho\, u_{0,kp}(\varrho)\, u_{0,np}(\varrho)\, d\varrho = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq n \\ 1 \text{ für } k = n\,. \end{cases} \tag{15}$$

5. Erzwungene Schwingungen. Nach diesen Vorbereitungen können die Gleichungen (6a) sukzessive integriert werden. Die erste Gleichung für $n=1$ lautet mit (7), (10) und (12)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 + \Delta\Delta\eta_1 + \mu^2 \varepsilon_0 \Delta\eta_1 = \frac{\mu^2}{2} \sum_k \sum_p C_{kp} \Big[\lambda_{kp}^2 J_p(\lambda_{kp}\varrho) + \\ + \bar{\lambda}_{kp}^2 \frac{J_p(\lambda_{kp})}{I_p(\bar{\lambda}_{kp})}\, I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho)\Big] \sin(p\varphi + \varphi_0)\, (\Phi_{-1,kp}(\tau) + \Phi_{+1,kp}(\tau))\,,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wobei zur Abkürzung für die Zeitfunktionen

$$\Phi_{q,kp}(\tau) = A_{kp} \cos(\omega_{kp} + q\alpha)\tau + B_{kp} \sin(\omega_{kp} + q\alpha)\tau \qquad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{17}$$

gesetzt wurde. Mit dem Ansatz

$$\eta_1(\varrho, \varphi, \tau) = \sum_k \sum_p [u_{-1,kp}(\varrho)\, \Phi_{-1,kp}(\tau) + u_{+1,kp}(\varrho)\, \Phi_{+1,kp}(\tau)] \sin(p\varphi + \varphi_0) \tag{18}$$

[1] Vgl. z. B. *Biezeno-Grammel*, Techn. Dynamik, S. 440.

kommen aus (16) die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left[D(\varrho)-\left(\bar{\sigma}^2_{\mp kp}+\frac{p^2}{\varrho^2}\right)\right]\left\{\left[D(\varrho)+\left(\sigma^2_{\mp kp}-\frac{p^2}{\varrho^2}\right)\right]u_{\mp 1,kp}\right\}= \\ =\frac{\mu^2 C_{kp}}{2}\left[\lambda^2_{kp}J_p(\lambda_{kp}\varrho)+\bar{\lambda}^2_{kp}\frac{J_p(\lambda_{kp})}{I_p(\bar{\lambda}_{kp})}I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho)\right] \tag{19}$$

mit

$$\bar{\sigma}^2_{\mp kp}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\mu^2\varepsilon_0)^2+4(\omega_{kp}\mp\alpha)^2}+\mu^2\varepsilon_0\right), \\ \sigma^2_{\mp kp}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\mu^2\varepsilon_0)^2+4(\omega_{kp}\mp\alpha)^2}-\mu^2\varepsilon_0\right). \tag{19a}$$

Die homogenen Gleichungen entsprechen den Gleichungen (11a) und haben daher als Integrale die *Bessel*schen bzw. die modifizierten *Bessel*schen Funktionen mit den Argumenten $\sigma_{\mp kp}\varrho$ bzw. $\bar{\sigma}_{\mp kp}\varrho$. Eine Partikularlösung der inhomogenen Gleichungen kann leicht durch einen der rechten Seite entsprechenden Ansatz gefunden werden, so daß man schließlich als vollständige Lösung von (19)

$$u_{\mp 1,kp}(\varrho)=c_{\mp kp}J_p(\sigma_{\mp kp}\varrho)+\bar{c}_{\mp kp}I_p(\bar{\sigma}_{\mp kp}\varrho)+\alpha_{\mp kp}J_p(\lambda_{kp}\varrho)+\bar{\alpha}_{\mp kp}I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho) \tag{20}$$

mit den Konstanten

$$\alpha_{\mp kp}=\frac{\mu^2\lambda^2_{kp}C_{kp}}{2\left[\lambda^4_{kp}-\mu^2\varepsilon_0\lambda^2_{kp}-(\omega_{kp}\mp\alpha)^2\right]},\qquad \bar{\alpha}_{\mp kp}=\frac{\mu^2\bar{\lambda}^2_{kp}C_{kp}}{2\left[\bar{\lambda}^4_{kp}+\mu^2\varepsilon_0\bar{\lambda}^2_{kp}-(\omega_{kp}\mp\alpha)^2\right]} \tag{20a}$$

und den durch Anpassung der Lösungen an die Randbedingungen zu ermittelnden Konstanten $c_{\mp kp}$, $\bar{c}_{\mp kp}$ erhält. Damit ist die erste Näherung η_1 bekannt und kann auf der rechten Seite der Gleichungen (6a) für $n=2$ eingesetzt werden:

$$\ddot{\eta}_2+\Delta\Delta\eta_2+\mu^2\varepsilon_0\Delta\eta_2=\frac{\mu^2}{2}\sum_k\sum_p\Big\{\left[c_{-kp}\sigma^2_{-kp}J_p(\sigma_{-kp}\varrho)-\bar{c}_{-kp}\bar{\sigma}^2_{-kp}I_p(\bar{\sigma}_{-kp}\varrho)+\right. \\ +c_{+kp}\sigma^2_{+kp}J_p(\sigma_{+kp}\varrho)-\bar{c}_{+kp}\bar{\sigma}^2_{+kp}I_p(\bar{\sigma}_{+kp}\varrho)+ \\ +(\alpha_{-kp}+\alpha_{+kp})\lambda^2_{kp}J_p(\lambda_{kp}\varrho)-(\bar{\alpha}_{-kp}+\bar{\alpha}_{+kp})\bar{\lambda}^2_{kp}I_p(\bar{\lambda}_{kp}\varrho)]\Phi_{0,kp}(\tau)+ \\ \left.+[\ldots.]\Phi_{-2,kp}(\tau)+[\ldots.]\Phi_{+2,kp}(\tau)\right\}\sin(p\varphi+\varphi_0)= \\ =\frac{\mu^2}{2}\sum_k\sum_p\left\{F_{kp}(\varrho)\Phi_{0,kp}(\tau)+\cdots\right\}\sin(p\varphi+\varphi_0). \tag{21}$$

Hier sind nur die bei Zeitfunktionen mit $q=0$ stehenden Ortsfunktionen hingeschrieben, da sie allein für eine Näherung bis ε_1^2 einschließlich in Betracht kommen. Die $F_{kp}(\varrho)$ sind bekannte stetige Funktionen von ϱ, die nach den Eigenfunktionen der freien Schwingungen entwickelt werden. Da Letztere nach Ziffer 4 ein orthogonales Funktionensystem bilden, kann die Entwicklung in der Form

$$F_{kp}(\varrho)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{(n)}_{kp}u_{0,np}(\varrho) \tag{22}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$a^{(n)}_{kp}=\int_{\varrho=0}^{1}\varrho\,F_{kp}(\varrho)\,u_{0,np}(\varrho)\,d\varrho \tag{22a}$$

vorgenommen werden, womit die Gleichungen (21) übergehen in

$$\ddot{\eta}_2+\Delta\Delta\eta_2+\mu^2\varepsilon_0\Delta\eta_2=\frac{\mu^2}{2}\sum_k\sum_p\sum_n a^{(n)}_{kp}U_{0,np}(\varrho,\varphi)\Phi_{0,kp}(\tau)+\cdots. \tag{23}$$

Hieraus liefert der Lösungsansatz

$$\eta_2=\sum_k\sum_p\sum_n c^{(n)}_{kp}U_{0,np}(\varrho,\varphi)\bar{\Phi}^{(n)}_{kp}(\tau) \tag{24}$$

zunächst

$$\sum_k\sum_p\sum_n c^{(n)}_{kp}\left[U_{0,np}\ddot{\bar{\Phi}}^{(n)}_{kp}+(\Delta\Delta U_{0,np}+\mu^2\varepsilon_0\Delta U_{0,np})\bar{\Phi}^{(n)}_{kp}\right]= \\ =\frac{\mu^2}{2}\sum_k\sum_p\sum_n a^{(n)}_{kp}U_{0,np}\Phi_{0,kp}+\cdots, \tag{25}$$

was für $n \neq k$ durch

$$\bar{\Phi}_{kp}^{(n)} = \Phi_{0,kp} \tag{26}$$

erfüllt werden kann, wodurch (25) mit Beachtung von (9) übergeht in

$$\sum_p \sum_n{}' c_{kp}^{(n)} (\omega_{np}^2 - \omega_{kp}^2) U_{0,np} = \frac{\mu^2}{2} \sum_p \sum_n{}' a_{kp}^{(n)} U_{0,np} .$$

Die Striche an den Summenzeichen deuten an, daß die Glieder mit $n = k$ fortzulassen sind. Der Vergleich der linear unabhängigen Funktionen $U_{0,np}(\varrho, \varphi)$ liefert die Entwicklungskoeffizienten

$$c_{kp}^{(n)} = \frac{\mu^2}{2 (\omega_{np}^2 - \omega_{kp}^2)} a_{kp}^{(n)} \qquad (n \neq k) . \tag{27}$$

Für $n = k$ versagt der Ansatz (26). Für die Zeitfunktionen gelten jetzt die Differentialgleichungen

$$\ddot{\bar{\Phi}}_{kp}^{(k)} + \omega_{kp}^2 \bar{\Phi}_{kp}^{(k)} = \frac{\mu^2 a_{kp}^{(k)}}{2 c_{kp}^{(k)}} \Phi_{0,kp} . \tag{28}$$

Da die Lösungen der homogenen Gleichungen dieselben Frequenzen ω_{kp} wie die Zeitfunktionen $\Phi_{0,kp}$ haben und daher der „Resonanzfall" vorliegt, läßt sich (28) erfüllen durch

$$\Phi_{kp}^{(k)}(\tau) = \tau (A_{kp} \sin \omega_{kp} \tau - B_{kp} \cos \omega_{kp} \tau) \tag{29}$$

und

$$c_{kp}^{(k)} = \frac{\mu^2}{4 \omega_{kp}} a_{kp}^{(k)} . \tag{30}$$

Damit sind sämtliche Anteile der Lösung η_2 gewonnen und die Einzellösungen η_0 und η_2 werden nach (5) zur Gesamtlösung

$$\left.\begin{aligned} \eta = \sum_k \sum_p \{ &(u_{0,kp} + \varepsilon_1^2 \sum_n{}' c_{kp}^{(n)} u_{0,np}) (A_{kp} \cos \omega_{kp} \tau + B_{kp} \sin \omega_{kp} \tau) + \\ &+ \varepsilon_1^2 c_{kp}^{(k)} u_{0,kp} \tau (A_{kp} \sin \omega_{kp} \tau - B_{kp} \cos \omega_{kp} \tau) \} \sin (p\varphi + \varphi_0) \end{aligned}\right| \tag{31}$$

zusammengesetzt, wobei der für die Näherung bis ε_1^2 unwesentliche Anteil η_1 fortgelassen wurde.

6. Stabilitätsuntersuchung. Zunächst wird die Lösung (31) umgeordnet zu

$$\eta = \sum_k \sum_p [A_{kp} g_{kp}^{(1)}(\varrho, \varphi, \tau) + B_{kp} g_{kp}^{(2)}(\varrho, \varphi, \tau)] = \sum_k \sum_p \eta_{kp} ,$$

indem alle bei den Konstanten A_{kp} bzw. B_{kp} stehenden Ausdrücke zusammengefaßt werden. Für jede Einzellösung η_{kp} ist sodann zu untersuchen, wann sie mit der Zeit anwächst. Die Beantwortung dieser Frage liefert ein bei solchen Problemen zuerst von *W. Kucharski* angewendetes, aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten auf partielle Differentialgleichungen übertragenes Verfahren[1, 2]: Man bildet die neuen Funktionen $\bar{g}_{kp}^{(1)} = g_{kp}^{(1)}(\tau + P)$ mit $P = \frac{2\pi}{\alpha}$ und entsprechend $\bar{g}_{kp}^{(2)}$ und berücksichtigt nur ihre Zeitabhängigkeit. Da diese Funktionen auch Lösungen der Differentialgleichung (4) sind, lassen sie sich durch lineare Substitution

$$\bar{g}_{kp}^{(i)} = \alpha_{i1}^{(kp)} g_{kp}^{(1)} + \alpha_{i2}^{(kp)} g_{kp}^{(2)} \qquad (i = 1, 2) \tag{32}$$

aus den $g_{kp}^{(i)}$ aufbauen, die noch bestimmten Anfangsbedingungen unterworfen werden, so daß die *Floquet*sche Theorie anwendbar wird. Die Bedingung für die Stabilität der Lösungen η_{kp} lautet dann

$$|\alpha_{11}^{(kp)}| \leq 1 . \tag{33}$$

Die Substitutionskoeffizienten bestimmt man aus (32) in gleicher Weise wie in der früheren Arbeit des Verfassers[2] durch Vergleich der bei gleichen Zeit- und Ortsfunktionen stehenden Ausdrücke. Führt man noch das Frequenzverhältnis

$$\delta_{kp} = \frac{\alpha}{\omega_{kp}} = \frac{\alpha}{\lambda_{kp} \sqrt{\lambda_{kp}^2 - \mu^2 \varepsilon_0}} \tag{34}$$

[1] *W. Kucharski*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 385.
[2] Vgl. Fußnote 3 auf Seite 141.

ein und nimmt in (33) das Gleichheitszeichen, so liefert die Ausrechnung für jede Schwingungsform eine Schar von Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten in den $(\varepsilon_1^{(kp)}, \delta_{kp})$-Ebenen aus den Gleichungen

$$\varepsilon_1^{(kp)} = \frac{\lambda_{kp}\sqrt{\lambda_{kp}^2 - \mu^2 \varepsilon_0}}{\mu} \sqrt{\frac{2\,\delta_{kp}\left(\pm 1 - \cos\frac{2\pi}{\delta_{kp}}\right)}{\pi\, a_{kp}^{(k)} \sin\frac{2\pi}{\delta_{kp}}}} \quad . \tag{35}$$

Die Instabilitätsgebiete nehmen ihren Ausgang von den durch $\varepsilon_1^{(kp)} = 0$ gegebenen Punkten der δ_{kp}-Achsen, also von $\delta_{kp} = 2/r$ bzw. von den kritischen Frequenzen

$$\alpha_{krit} = \frac{2\,\omega_{kp}}{r} \qquad (r = 1, 2, 3 \ldots) .$$

Obwohl (35) bei Einsetzen dieser Werte einen unbestimmten Ausdruck von der Form 0/0 liefert, ist doch

$$\lim_{\delta_{kp} \to 2/r} \varepsilon_1^{(kp)} = 0.$$

Weitere kritische Frequenzen treten bei einer Näherung bis ε_1^2 nicht hinzu, da die Entwicklungskoeffizienten $a_{kp}^{(k)}$ wegen (22a) und (21) nur mit den Koeffizienten (20a), d. h. nur für $\alpha = 2\,\omega_{kp}$ gegen unendlich gehen.

Das Problem ist damit in erster Näherung für alle Randbedingungen gelöst, wenn die Entwicklungskoeffizienten $a_{kp}^{(k)}$ aus (22a) berechnet sind.

7. Ein Beispiel. Der Einfachheit wegen wird das Beispiel einer Platte behandelt, deren mittlere Krümmung am Rande verschwinden soll. Nach Ziffer 4 erhält man den Eigenwert λ_{kp} aus der k-ten Nullstelle der *Bessel*schen Funktion p-ter Ordnung. Berechnet man das allgemein zu $u''(1) + \nu u'(1)$ proportionale größte Randmoment M_1 für diesen Einspannungsfall und vergleicht es mit dem bei vollkommener Einspannung $(1/c = 0)$ und gleicher Auslenkung $u(0)$ in Plattenmitte auftretenden Randmoment M_2, so findet man für die Grundschwingungsform $k = 0$; $p = 0$ der nicht statisch vorbelasteten Platte $(\varepsilon_0 = 0)$ $M_1 = 0{,}14\, M_2$. Für die statisch vorbelastete Platte sowie für alle anderen Schwingungsformen wird M_1 sogar noch kleiner im Verhältnis zu M_2. Die gewählte Randbedingung kann also als brauchbare Näherung für die frei aufgelagerte Platte angesehen werden, da sowieso in der technischen Praxis keine vollkommen freie Auflagerung vorkommt.

Die Rechnung gestaltet sich nun besonders einfach, weil die Funktionen $J_p(\lambda_{kp}\varrho)$ in sämtlichen Gleichungen als einzige Ortsfunktionen auftreten. So erhält man

$$u_{\mp 1,\,kp}(\varrho) = \alpha_{\mp kp} J_p(\lambda_{kp}\varrho) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\mp kp}$$

nach (20a) und

$$F_{kp}(\varrho) = \lambda_{kp}^2 (\alpha_{-kp} + \alpha_{+kp}) J_p(\lambda_{kp}\varrho) = a_{kp}^{(k)} u_{0,\,kp}(\varrho) .$$

In der Entwicklung (22) ist also $a_{kp}^{(n)} = 0$ für $k \neq n$, und die für die Stabilitätskriterien maßgebenden Koeffizienten $a_{kp}^{(k)}$ lassen sich leicht berechnen:

$$a_{kp}^{(k)} = \frac{\lambda_{kp}^2 (\alpha_{-kp} + \alpha_{+kp})}{C_{kp}} = \frac{\mu^2 \lambda_{kp}^2}{(\lambda_{kp}^2 - \mu^2 \varepsilon_4)(4 - \delta_{kp}^2)} .$$

Wenn man noch den ersten Eigenwert $\mu = \lambda_{00}$ des statischen Knickproblems einführt, erhält man damit aus (35) die Beziehung

$$\varepsilon_1^{(kp)} = \frac{\lambda_{kp}^2 - \varepsilon_0 \lambda_{00}^2}{\lambda_{00}} \sqrt{\frac{2\,\delta_{kp}(\delta_{kp}^2 - 4)\left(\pm 1 + \cos\frac{2\pi}{\delta_{kp}}\right)}{\pi \sin\frac{2\pi}{\delta_{kp}}}} \tag{36}$$

für die Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten. Erreicht die statische Vorbelastung die Knicklast, d. h. wird $\varepsilon_0 = 1$, so ergibt die erste Gleichung $\varepsilon_1^{(0\,0)} = 0$, also gleichfalls Instabilität in allen Fällen. Die Ergebnisse der für verschiedene statische Vorbelastungen und die drei ersten Schwingungsformen durchgeführten Auswertung mit $\lambda_{00} = 2.4048$, $\lambda_{01} = 3.8317$ und $\lambda_{10} = 5.5201$ sind in Abb. 2 dargestellt. Die zugehörigen di-

mensionslosen Eigenfrequenzen folgen für verschiedene Vorbelastungen ε_0 aus

$$\omega_{kp} = \lambda_{kp}^2 (\lambda_{kp}^2 - \lambda_{00}^2 \varepsilon_0) \,.$$

Mit wachsender Vorbelastung ε_0 werden die Instabilitätsgebiete breiter und sind ferner bei der ersten Schwingungsform am ausgeprägtesten. Die sich links von $\delta_{kp} = 2/3$ häufenden Gebiete sind nicht eingetragen, da sie praktisch bedeutungslos sind. Für die erste Schwingungsform ohne statische Vorbelastung stimmt (36) übrigens genau mit dem für den längspulsierend belasteten, frei aufgelagerten Stab ermittelten Stabilitätskriterium[1] überein.

Für die höheren Schwingungsformen interessiert praktisch höchstens noch der Frequenzbereich in der Nähe von $\alpha = 2\omega_{kp}$, der aber schon für die Schwingung mit einem Knotenkreis sehr schmal wird. Die dargestellten Bereiche werden daher für die praktische Beurteilung des Stabilitätsverhaltens im allgemeinen ausreichen, besonders wenn der stets vorhandene stabilitätsverbessernde Einfluß der Dämpfung mit berücksichtigt wird.

Es ist von besonderem Interesse, daß Formel (36) auch Instabilitätsgebiete für eine statische Vorbelastung auf Zug ($\varepsilon_0 < 0$) liefert: Für den Fall $k = 0$, $p = 0$ und $\varepsilon_0 = -0{,}5$ ist das von $\delta_{00} = 2$ ausgehende noch stark ausgeprägte Instabilitätsgebiet in Abb. 2 eingetragen. Die Plattenschwingung ist also selbst dann noch instabil, wenn die konstante Zugkraft P_0 größer als die Amplitude P_1 der pulsierenden Last wird. An diesem Fall kann man besonders deutlich erkennen, wie ein auf den ersten Blick durchaus stabil erscheinender Schwingungszustand doch bei gewissen Frequenzen instabil werden kann.

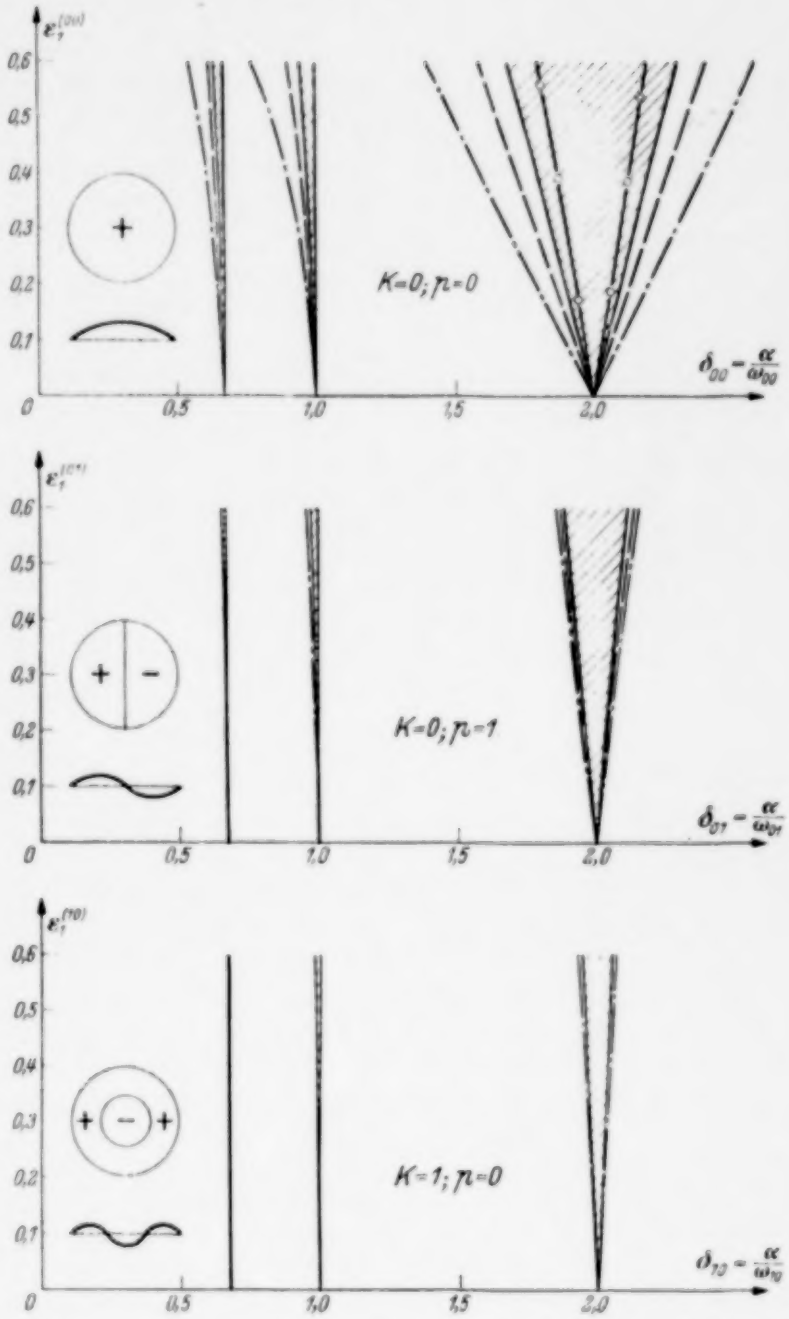


Abb. 2. Instabilitätsgebiete für die drei ersten Biegeschwingungsformen und verschiedene statische Vorbelastungen $P_0 = \varepsilon_0 P_K$.
[—— für $\varepsilon_0 = 0$ (schraffiert); — — — für $\varepsilon_0 = 1{:}4$; —·—·— für $\varepsilon_0 = 1{:}2$; —○—○— für $\varepsilon_0 = -1{:}2$ (Zug-Vorbelastung)].

(Eingegangen am 1. Oktober 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Karl-August Reckling*, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Lehrstuhl für Mechanik (Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó*).

[1] Vgl. Fußnote 3 von S. 141.

Inhalt:

Seite

Dose, A. u. *R. Landwehr*, Bestimmung der Linien gleicher Hauptspannungssumme mittels Interferenzen gleicher Dicke. Mit 10 Textabbildungen 73

Gedizli, H. S., Die Kreisplatte auf elastischer Unterlage unter einem an starrem Mittelstück angreifenden Moment. Mit 2 Textabbildungen 87

Wuest, W., Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitze. Mit 15 Textabbildungen 90

Mewes, E., Strukturmodelle und Systematik der Fließvorgänge. Mit 16 Textabbildungen 104

Krettner, J., Zur Theorie und Anwendung der schiefen Platte. Mit 1 Textabbildung 112

Pichler, O., Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben. Mit 8 Textabbildungen 119

Reckling, K. A., Die dünne Kreisplatte mit pulsierender Randbelastung in ihrer Mittelebene als Stabilitätsproblem. Mit 2 Textabbildungen 141

Unveränderter Nachdruck 1975
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Herstellung:
Strauß & Cramer GmbH, 6901 Leutershausen